



Доклад на кафедре «Железобетонные и каменные конструкции»
НИУ МГСУ

Механика железобетонных балок с нормальными трещинами при плоском изгибе

Автор: Пекин Дмитрий Анатольевич, главный конструктор, к.т.н.
Научный консультант: Трекин Николай Николаевич, д.т.н., профессор

www: <https://инв-строй.рф>

e-mail: dpekin@inv-stroy.ru

тел.: +7 495 508 23 04



ИНВ-Строй

Цель работы:

Предложить новую механику железобетонных балок с нормальными трещинами для массового проектирования и объединить преимущества известных методов расчета:

- по допускаемым напряжениям;
- по предельным усилиям;
- диаграммного метода (нелинейной деформационной модели);
- метода предельного равновесия,

на основе квазинелинейно-ступенчатого расчета в зависимости от стадий НДС при исключении гипотезы плоских сечений или кинематической гипотезы Тимошенко

Содержание доклада на основе статей [1-4] автора:

- Расстояние между нормальными трещинами в железобетонных балках при плоском изгибе [1]
- Нелинейные расчеты и «перераспределение» усилий в защемленной железобетонной балке при плоском изгибе [2]
- Стадии напряженно-деформированного состояния при плоском изгибе железобетонных балок [3]
- Механика железобетонных балок с нормальными трещинами при плоском изгибе [4]

Расстояние между нормальными трещинами l_s

Это основной внутренний параметр, влияющий на ширину их раскрытия и определяемый вместе с коэффициентом ψ согласно:

- СНиП II-V.1-62: $\psi_a \cdot l_T$,
- СНиП II-21-75, СНиП 2.03.01-84: $\psi_a \cdot l_T = 20(3,5 - 100\mu)^{\sqrt[3]{d}}$,
- СП 52-101-2003, СП 63.13330: $\psi_a \cdot l_T = \psi_s \cdot l_s$,

где $\psi_a = \psi_s = \frac{\varepsilon_{sm}}{\varepsilon_s} \leq 1$ – коэффициент, учитывающий неравномерное распределение относительных деформаций арматуры между трещинами;

ε_{sm} – средние деформации арматуры на участке между трещинами l_s ;

$\varepsilon_s = \sigma_s / E_s$ – деформации арматуры в нормальном сечении с трещиной;

σ_s – напряжение в арматуре; E_s – модуль упругости арматуры,

μ и d – процент армирования и диаметр растянутой арматуры.

Предпосылки и допущения для определения l_s

На основе предложений проф. Мурашева В. И. [5] при выводе фор. (116) для элемента в состоянии чистого изгиба:

- первая трещина возникает в наиболее слабом месте в силу неоднородности бетона;
- напряжения в растянутом бетоне в сечении с трещиной равны нулю;
- по мере удаления от первой трещины напряжения в растянутой арматуре падают, а напряжения в бетоне возрастают до значений сопротивления бетона растяжению;
- новая смежная трещина образуется в сечении, удаленном от первой трещины на расстоянии достаточном для снижения напряжений в арматуре до величины, отвечающей напряжению в бетоне при появлении трещины.

Расстояние l_s согласно Еврокод 2

Определяется в зависимости от шага продольной растянутой арматуры с учетом типа конструктивных элементов – для балок, в которых шаг между арматурой принимается минимальным из соображений бетонирования – не более $5(a + d_s/2)$, по фор. (7.11):

$$l_{s,max} = k_3 \cdot a + k_1 \cdot k_2 \cdot k_4 \cdot d_s / \rho_{p,eff},$$

где k_1 – коэффициент, учитывающий профиль арматуры;

k_2 – коэффициент, характеризующий НДС элемента;

$k_3 = 3,4$ и $k_4 = 0,425$ – эмпирические коэффициенты;

$\rho_{p,eff} = A_s / A_{bt}$ – коэффициент, учитывающий соотношение площадей растянутых арматуры и бетона,

A_{bt} – эффективная площадь растянутого бетона, окружающего арматуру и принимаемая наименьшей из следующих значений: $2,5a$ или $(h - x)/3$ или $h/2$.

Ширина раскрытия в СП 63.13330 и СНиП II-V.1-62

В СП 63.13330 авторы вернулись к исходной формулировке из СНиП II-V.1-62 с учетом и некоторой модификацией коэффициентов δ , φ_1 , η из СНиП 2.03.01-84:

$$\delta \cdot \varphi_1 \cdot \eta \cdot \frac{\sigma_s}{E_s} \cdot 20(3,5 - 100\mu) \sqrt[3]{d} \rightarrow \varphi_1 \cdot \varphi_2 \cdot \varphi_3 \cdot \frac{\sigma_s}{E_s} \cdot \psi_s \cdot l_s,$$

где $\varphi_1 = 1,0$ и $1,4$ – при непродолжительном и продолжительном действии нагрузки, соответственно;

$\varphi_2 = 0,5$ и $0,8$ – для арматуры периодического профиля или канатной и для гладкой арматуры, соответственно;

$\varphi_3 = 1,0$ и $1,2$ – для изгибаемых или внецентренно сжатых и для растянутых элементов, соответственно.

Ограничения l_s в СП 63.13330

Базовое расстояние между трещинами l_s , нормальными к продольной оси элемента, определяется по следующей формуле и должно находиться в указанном диапазоне:

$$10d_s \text{ или } 10 \text{ см} \leq l_s = 0,5 \frac{A_{bt}}{A_s} d_s \leq 40d_s \text{ или } 40 \text{ см},$$

где A_s и d_s – площадь сечения и номинальный диаметр растянутой арматуры;
 A_{bt} – площадь сечения растянутого бетона перед образованием нормальных трещин (при $M = M_{cr,c}$) также ограничена диапазоном:

$$2a \cdot b \leq A_{bt} = b \cdot y_t \leq \frac{b \cdot h}{2},$$

где b и h – ширина и высота элемента соответственно;

y_t – высота растянутой зоны элемента;

a – расстояние от растянутой грани элемента до центра тяжести растянутой арматуры.

Определение l_s при расчетах изгибаемых стержневых ЖБК

Согласно [1] предлагается выполнять в первую очередь на основе деформационных характеристик бетона и следующих предпосылок:

- первая нормальная к продольной оси трещина в конструктивном элементе возникает в зоне действия максимального изгибающего момента от постоянных нагрузок при достижении им значения $M = M_{crc}$;
- относительные деформации растяжения на участке между первой и второй нормальными трещинами принимаются равномерно распределенными по длине растянутой грани элемента и равными $\varepsilon_{red} = \varepsilon_{bt0}$ (с учетом продолжительности действия нагрузки);
- следующая нормальная трещина возникает на расстоянии, определенном с учетом характера нагрузок, граничных условий, геометрических характеристик и т.д.

Определение l_s по деформационным характеристикам

Бетона на примере консольной балки из статьи автора [1]:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{red} = \varepsilon_{bt0} &= \frac{1}{l - l_1} \int_{l_1}^l \frac{\sigma_{bt,crc}}{E_{bt}} dL = \frac{1}{l - l_1} \int_{l_1}^l \frac{M_{crc} \cdot y_t}{E_{bt} \cdot I_{red}} dL = \\ &= \frac{P_2 \cdot y_t}{(l - l_1) E_{bt} \cdot I_{red}} \int_{l_1}^l L dL = \frac{P_2 \cdot y_t}{(l - l_1) E_{bt} \cdot I_{red}} \cdot \frac{L^2}{2} \Big|_{l_1}^l = \\ &= \frac{P_2 \cdot y_t}{(l - l_1) \cdot E_{bt} \cdot I_{red}} \cdot \frac{l^2 - l_1^2}{2} = \frac{P_2 \cdot y_t (l + l_1)}{2 \cdot E_{bt} \cdot I_{red}} = \frac{M_{crc} \cdot y_t (l + l_1)}{2 \cdot E_{bt} \cdot I_{red} \cdot l_1},\end{aligned}$$

откуда:

$$l_1 = \frac{M_{crc} \cdot y_t \cdot l}{2 \cdot E_{bt} \cdot I_{red} \cdot \varepsilon_{bt0} - M_{crc} \cdot y_t} = \frac{l}{\frac{2 \cdot E_{bt} \cdot I_{red} \cdot \varepsilon_{bt0}}{M_{crc} \cdot y_t} - 1} \quad \text{и} \quad l_s = l - l_1,$$

Определение l_s , обозначения:

где $\sigma_{bt,crc} = M_{crc} \cdot y_t / I_{red}$ – нормальные растягивающие напряжения на грани балки в момент образования нормальных трещин,

y_t – расстояние от растянутой грани до центра тяжести приведенного нормального сечения до появления трещин;

I_{red} – момент инерции приведенного нормального сечения до появления трещин относительно центральной оси, перпендикулярной плоскости изгиба;

$M_{crc} = P_2 \cdot L$ – изгибающий момент при образовании второй трещины;

$P_2 = P_{crc} + \Delta P = M_{crc} / l_1$ – внешняя сосредоточенная сила на свободном конце консоли при образовании второй трещины;

P_{crc} – внешняя сосредоточенная сила на свободном конце консоли при образовании первой трещины;

ΔP – приращение внешней нагрузки на свободном конце консоли, необходимое для образования второй трещины;

E_{bt} – начальный модуль упругости бетона;

l – длина пролета консольной балки или расстояние от свободного конца до первой нормальной трещины (в данном случае в заделке);

l_1 – расстояние от свободного конца до второй нормальной трещины.

Результаты определения l_s по формулам на слайде 10

На примере консольной балки сечением 30×50 (h) см и длиной пролета 3 м, выполненные автором в статье [1], показали:

- что при использовании значения предельной относительной деформации бетона на растяжение $\varepsilon_{bt0} = 0,0001$ согласно СП 63 значение l_s получается существенно завышенным;
- что при уменьшении предельной относительной деформации бетона на растяжение на 30% до $\varepsilon_{bt0} = 0,00007$ значение l_s получается сопоставимым с СНиП 2.03.01-84 и Еврокод 2.

Очевидно, что использование $\varepsilon_{bt0} = 0,0001$ для всех классов бетона, параметров армирования и условий эксплуатации не позволяет получить приемлемый результат, и требуется проведение дополнительных экспериментальных исследований для определения растяжимости бетона **совместно с арматурой**

Выводы по статье [1]:

- Поиск зависимостей и уточнение базового расстояния между трещинами, нормальными к продольной оси элемента, и его относительной величины на основе деформационных характеристик бетона является актуальной задачей, требующей проведения, в том числе, экспериментальных исследований на бетонах и арматуре различных видов и классов
- Нормативная методика расчета согласно п. 8.2.17 СП 63.13330.2018 по определению базового расстояния между нормальными трещинами и ширины их раскрытия с учетом приведенных примеров требует корректировки

Недостатки НДМ, перечисленные в статье автора [2]

1. Заимствование и применение традиционных методов, используемых для однородных по элементам без нормальных трещин, работающих в упругой или упругопластической стадиях, приводят к противоречиям и несоответствиям основам механики железобетона:
 - гипотеза плоских сечений для элементов с нормальными трещинами противоречит фактическому НДС и не позволяет получить достоверные величины напряжений и деформаций как в сжатой зоне для бетона и арматуры, так и для растянутой;
 - одинаковые параметры изгибной жесткости по длине стержневого КЭ, моделирующего фрагмент балки, не соответствуют экспериментам и не могут соответствовать в принципе, поскольку между нормальными трещинами железобетон находится совсем в другом НДС;

Недостатки НДМ (продолжение п. 1):

- не регламентируется шаг разбиения железобетонных балок на КЭ по длине, что без калибровки расчетной модели на основе экспериментов не позволяет получить реальную картину НДС по причинам, указанным выше, кроме того, принятая длина стержневого КЭ для одного случая не может удовлетворять различным условиям и параметрам для других ЖБЭ здания или сооружения;
- связь между прогибом и внутренними напряжениями определяется через кривизну, которая также базируется на гипотезе плоских сечений и состоянии чистого изгиба, которое не может соответствовать фактическому НДС по многим причинам;
- использование для проверки нормальных сечений по НДМ внутренних усилий на основе результатов линейного упругого статического расчета согласно п. 8.1.23 СП 63.13330.

Недостатки НДМ (продолжение):

2. При $\varepsilon_{s2} = 0,025$ и двухлинейной диаграмме « σ - ε » ширина раскрытия нормальных трещин при расчетных нагрузках может составлять от 2,5 до 10 мм для l_s от 100 до 400 мм, соответственно. **Кроме того**, для статически определимых балок игнорируется принципиальный факт невозможности развития в продольной арматуре пластических деформаций после достижения растягивающими напряжениями предела текучести в отсутствии или недостаточном количестве поперечной арматуры, предотвращающей разрушение сжатой зоны бетона в нормальном сечении от среза. **Примеры** многочисленных экспериментов в НИИЖБ с ж/б балками говорят о кратно меньших $\varepsilon_s = 0,0015 \dots 0,0025$ при разрушении сжатой зоны бетона. **Заданные** предельные значения $\varepsilon_{s2} = 0,025$ и $0,015$ для двух- и трехлинейной диаграмм « σ - ε », являются следствием применения гипотезы плоских сечений и не учитывают фактические деформации в растянутой арматуре.

Недостатки НДМ (продолжение):

3. Следствием принятых допущений является невозможность корректного определения напряжений в растянутой арматуре и, следовательно, ширины раскрытия нормальных трещин, что будет обосновано ниже при описании стадий НДС.
4. В результате применения НДМ невозможно достигнуть одного из главных и определяющих факторов для механики стержневых железобетонных элементов – образование и раскрытие нормальных трещин по длине балки, поскольку расчетные модели балок состоят из набора стержневых КЭ с постоянными параметрами изгибной жесткости по длине вместо комбинации линейно упругих элементов, соединяемых между собой нелинейными стержневыми элементами исчезающе малой длины, моделирующими нормальные трещины, что будет предложено и рассмотрено далее.

Недостатки НДМ (окончание):

5. Другое важное несоответствие принятой идеализации на основе НДМ, деформационной теории пластичности или теорий пластического течения Друкера-Прагера, Гениева и др. экспериментальным данным, указанным в работе проф. Мурашев В.И. [5], см. р.4 а), о том, что нормальные трещины сравнительно быстро достигают некоторой предельной величины, мало удлиняясь после этого до начала разрушения, что требует исключить работу растянутого бетона сразу после образования нормальных трещин.
6. Время для подготовки и выполнения нелинейного расчета даже небольшого каркаса здания, особенно при наличии плитных ЖБК, может достигать от нескольких часов до нескольких суток и при этом на этапе последующей экспертизы стержневых или плитных элементов вовсе не гарантируется соответствие требованиям I группы ПС по другим критериям, например, прочности по наклонным сечениям.
7. Не реализуется эффект «перераспределения» изгибающих моментов в защемленных балках даже при физически нелинейных расчетах [2].

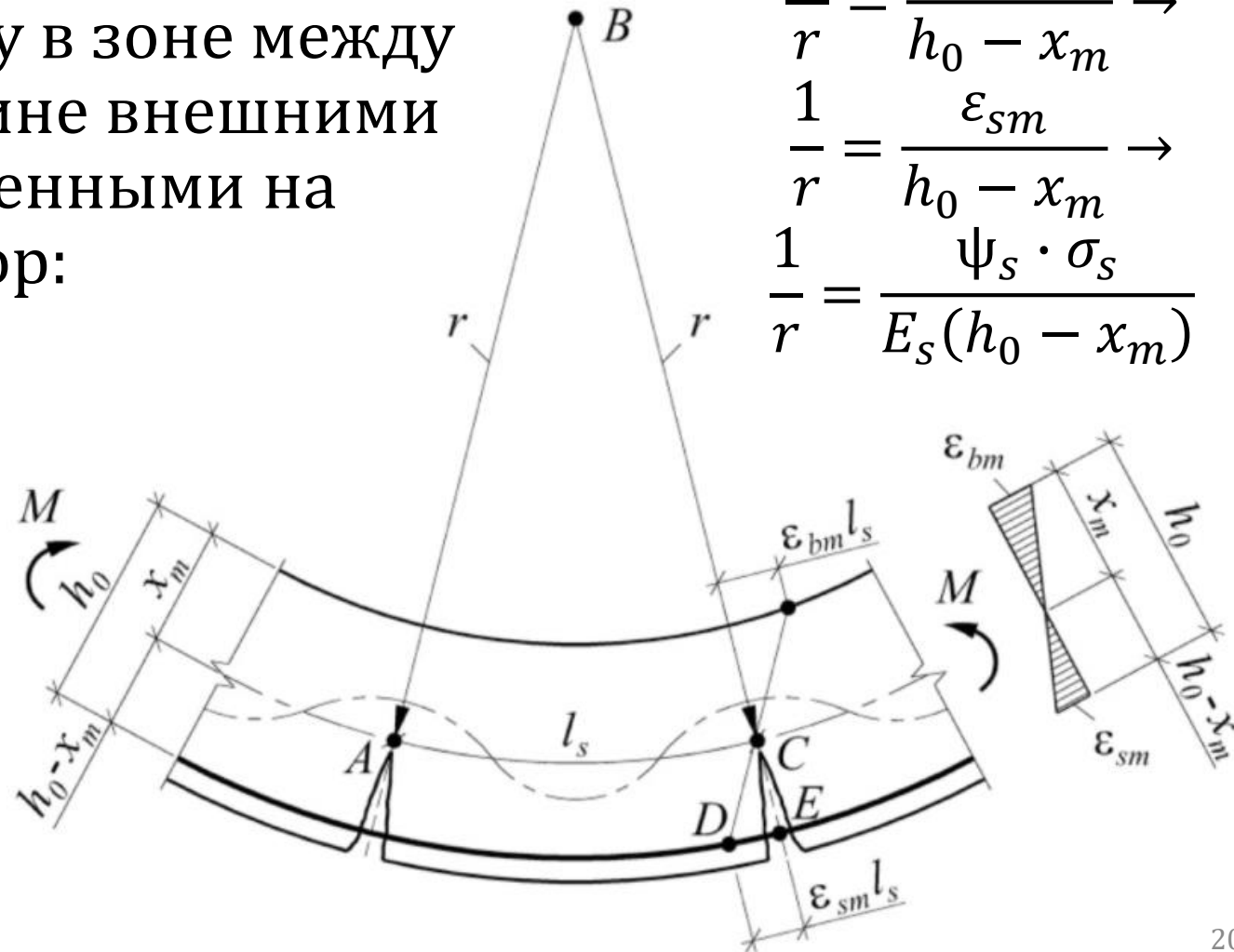
Выводы по статье [2]:

- Принятый в нормах СП 63.13330.2018 метод расчета нормальных сечений изгибаемых ЖБЭ на основе НДМ обладает не меньшим количеством недостатков и противоречий по сравнению с методом расчета по предельным усилиям
- Деформационные критерии разрушения нормального сечения ж/б балки принятые в НДМ не соответствуют НДС в предельной стадии и не позволяют количественно оценивать разрушающую нагрузку в неразрезных, рамных или пространственных ЖБК
- Требуется разработка новой механики изгиба ж/б балок с нормальными трещинами, которая позволит исключить указанные недостатки и объединить преимущества всех известных методов расчета: по допускаемым напряжениям и предельным усилиям, диаграммного метода и метода предельного равновесия

Стадии НДС для балок в статье автора [3]

Без традиционной привязки к состоянию чистого изгиба, возникающему в зоне между двумя одинаковыми по величине внешними поперечными силами, приложенными на одинаковом расстоянии от опор:

- Стадия I – без трещин
- Стадия II – образование и раскрытие нормальных трещин
- Стадия III – образование и раскрытие наклонных трещин
- Стадия IV – разрушение по нормальному или наклонному сечению в зависимости от принятого армирования



Детализация II стадии НДС в [3]: Стадия II.0

Образование нормальных трещин – напряжения в продольной растянутой арматуре до образования нормальных трещин σ_{s01} в десятки раз меньше расчетного сопротивления R_s , поскольку M_{crc} обычно кратно меньше предельного изгибающего момента M_{ult} , воспринимаемого сечением на стадии IV

Но в практике иногда встречаются такие случаи проектных ошибок, когда после приложения сравнительно небольшой неучтенной при проектировании поперечной нагрузки и образования нормальных трещин в балке или фундаментной плите, работающей в одном направлении, при очень низком проценте армирования μ_s и достаточно больших высоте поперечного сечения и длине пролета элемента сразу наступает предельное состояние, соответствующее стадии IV, с напряжениями в растянутой арматуре $\sigma_{s02} = R_s$

Детализация II стадии НДС в [3]: Стадия II.0

Высота сжатой зоны бетона до образования нормальной трещины равна расстоянию от центра тяжести поперечного сечения до наиболее сжатой фибры бетона $x_{01} = y_c \cong h/2$, а эпюра нормальных сжимающих напряжений бетона – треугольная. Очевидно, что после образования нормальной трещины в этом сечении происходит скачок и резкое увеличение нормальных напряжений как в крайней сжатой фибре бетона σ_{b02} , так и в растянутой арматуре σ_{s02}

В сжатой зоне бетона скачок нормальных напряжений можно обосновать следующими неравенствами:

$$I_{red,el} > I_{red,crc},$$
$$\sigma_{b01} = \frac{M_{crc} y_c}{I_{red,el}} < \sigma_{b02} = \frac{M_{crc} y_c}{I_{red,crc}},$$

где $I_{red,el}$ и $I_{red,crc}$ – моменты инерции поперечного сечения до и после образования нормальной трещины

Детализация II стадии НДС в [3]: Стадия II.0

Кроме того, коэффициенты приведения стали к бетону для сжатой ($\alpha_{s1} = \alpha_{sc}$) и растянутой ($\alpha_{s2} = \alpha_{st}$) арматуры после образования нормальных трещин не могут приниматься для балок равными друг другу $\alpha_{sc} = \alpha_{st}$, как это допускается согласно п. 8.2.16 и 8.2.30 СП 63.13330.2018. Доказательство выполним от противного, допустим следующие равенства: $\alpha_{sc} = \alpha_{st} = \alpha_s$, глубина нормальной трещины $y_{crc} \cong h/2$ и высота сжатой зоны бетона $x_{02} \cong h/2$, тогда преобразуя формулу: $bx^2 + 2\alpha(A'_s + A_s)x - 2\alpha(A'_sa' + A_sh_0) = 0$, получим:

$$\alpha_s = \frac{bx_{02}^2}{2(A'_sa' + A_sh_0) - 2x_{02}(A'_s + A_s)} = \frac{bh^2}{4(2A'_sa' + 2A_sh_0 - A'_sh - A_sh)}$$

и на примере консольной балки, рассмотренной в статье [1], получим $\alpha_s = 51,3$ и $E_{b,red} = E_s/\alpha_s = 3899$ МПа, что не может соответствовать действительности, поскольку для бетона класса В25:

$$E_{b0} = 30000 \text{ МПа и } E_{b,red} = R_b/\varepsilon_{b1,red} = 14,5/0,0015 = 9667 \text{ МПа}$$

Детализация II стадии НДС в [3]: Стадия II.1

Увеличение глубины нормальной трещины y_{crc} до центра тяжести поперечного сечения балки с учетом армирования или с достаточной точностью до половины высоты балки без его учета $y_t \cong h/2$ происходит при упругой работе сжатого бетона или с незначительными пластическими деформациями при действии на крайней фибре сжатого бетона нормальных напряжений σ_{b11}

Этот этап является достаточно важным, поскольку последующее увеличение глубины нормальной трещины и развитие пластических деформаций в сжатом бетоне позволяет зафиксировать отказ от возможности дальнейшего использования гипотезы плоских сечений и понятия кривизны для определения относительных деформаций в нормальном сечении балки с трещиной

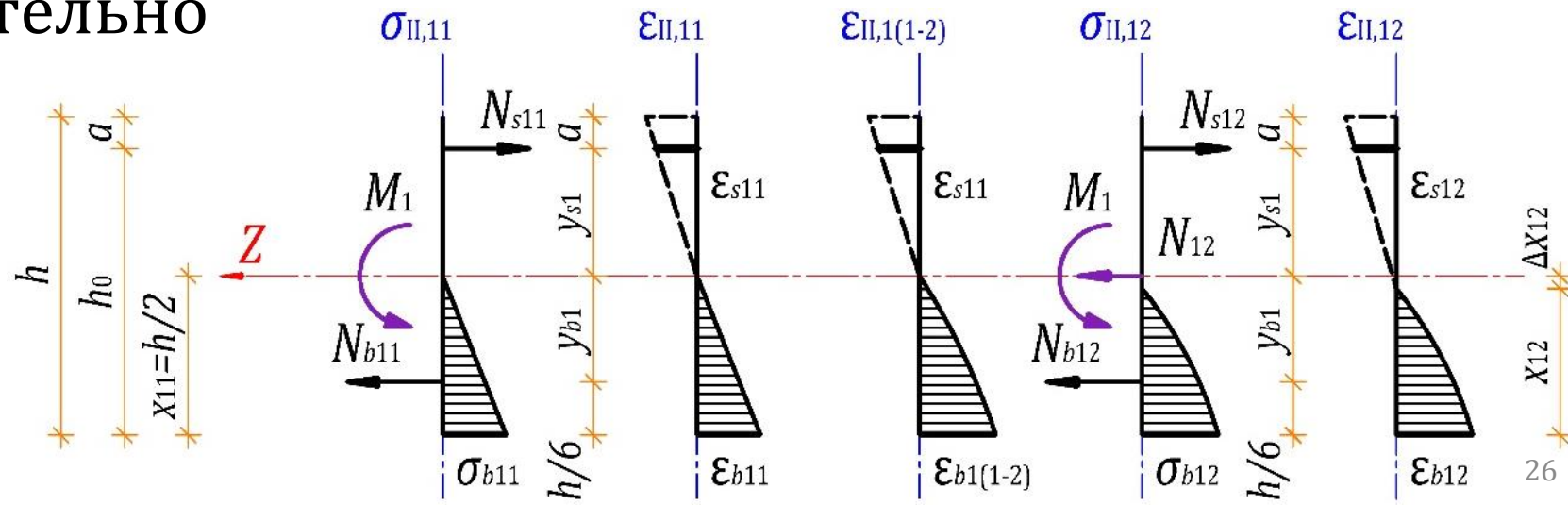
Детализация II стадии НДС в [3]: Стадия II.1

После этого на данном этапе **без роста** внешней вертикальной нагрузки, сохранении равновесия внутренних усилий в сечении и за счет пластической работы сжатого бетона необходимо учесть развитие продольных относительных деформаций в крайней фибре сжатого бетона с упругих ε_{b11} до упругопластических $\varepsilon_{b1(1-2)} \leq \varepsilon_{b12}$, дальнейшее возможное увеличение глубины нормальной трещины и соответствующие этому уменьшение высоты сжатой зоны бетона с $x_{11} = h/2$ до x_{12} на величину Δx_{12} и увеличение нормальных напряжений на крайней фибре сжатого бетона с σ_{b11} до σ_{b12} посредством диаграммы « σ - ε » и *кинематического фактора* k_{12} , определенного согласно [4]

Детализация II стадии НДС в [3]: Стадия II.1

При этом прогибы увеличиваются с f_{11} до f_{12} , но равновесие в сечении между внешней нагрузкой и внутренними усилиями сохраняется, т. е. изгибающий момент от внешней нагрузки равен сумме произведений равнодействующих в сжатом бетоне и растянутой арматуре на расстояния до продольной оси: $M_1 = y_{b1}N_{b12} + y_{s1}N_{s12}$, $N_{s12} = N_{b12} + N_{12}$, кроме того, в растянутой арматуре деформации $\epsilon_{s11} \cong \epsilon_{s12}$ и напряжения $\sigma_{s11} \cong \sigma_{s12}$ изменяются незначительно

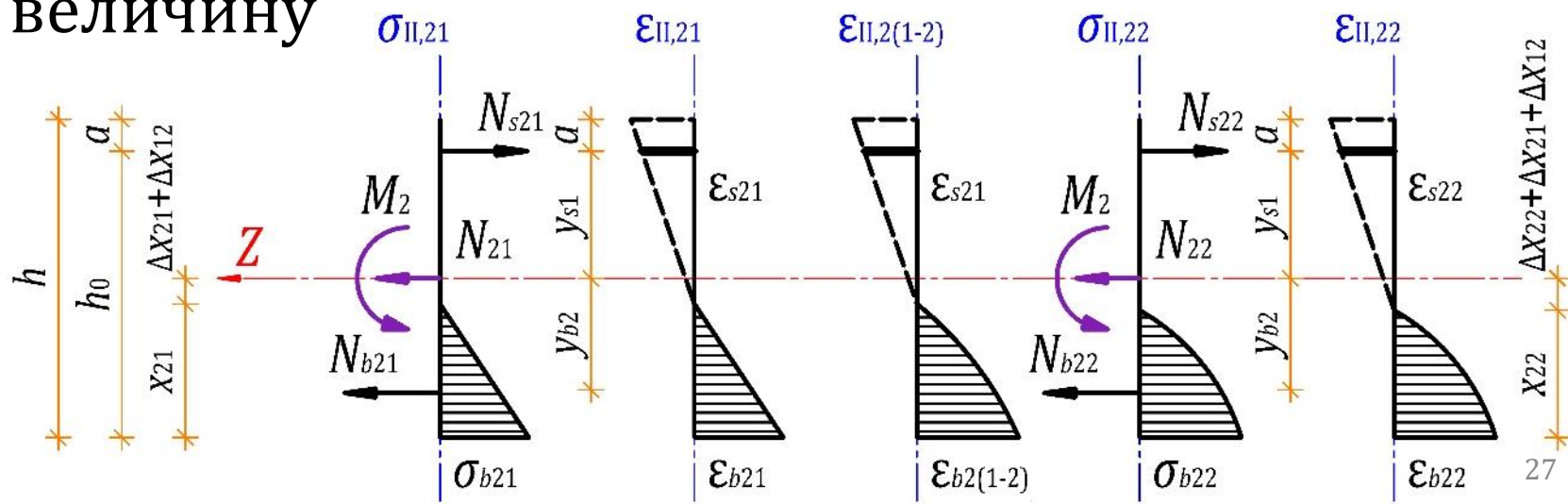
На рисунке показана
Стадия II.1 НДС
Этапы 1.1 и 1.2



Детализация II стадии НДС в [3]: Стадия II.2

Рост внешней вертикальной нагрузки за счет оставшейся части собственного веса и других постоянных нагрузок, вызывающий дальнейшее увеличение равнодействующих внутренних усилий с $N_{s12} = N_{b12} + N_{12}$ до $N_{s21} = N_{b21} + N_{21}$, нормальных напряжений на крайней фибре сжатого бетона с σ_{b12} до σ_{b21} , относительных деформаций в сжатом бетоне с ε_{b12} до ε_{b21} , растянутой арматуре с ε_{s12} до ε_{s21} и прогибов с f_{12} до f_{21} , уменьшение высоты сжатой зоны бетона с x_{12} до x_{21} на величину Δx_{21} за счет к. ф. k_{21}

На рисунке показана
Стадия II.2 НДС
Этапы 2.1 и 2.2

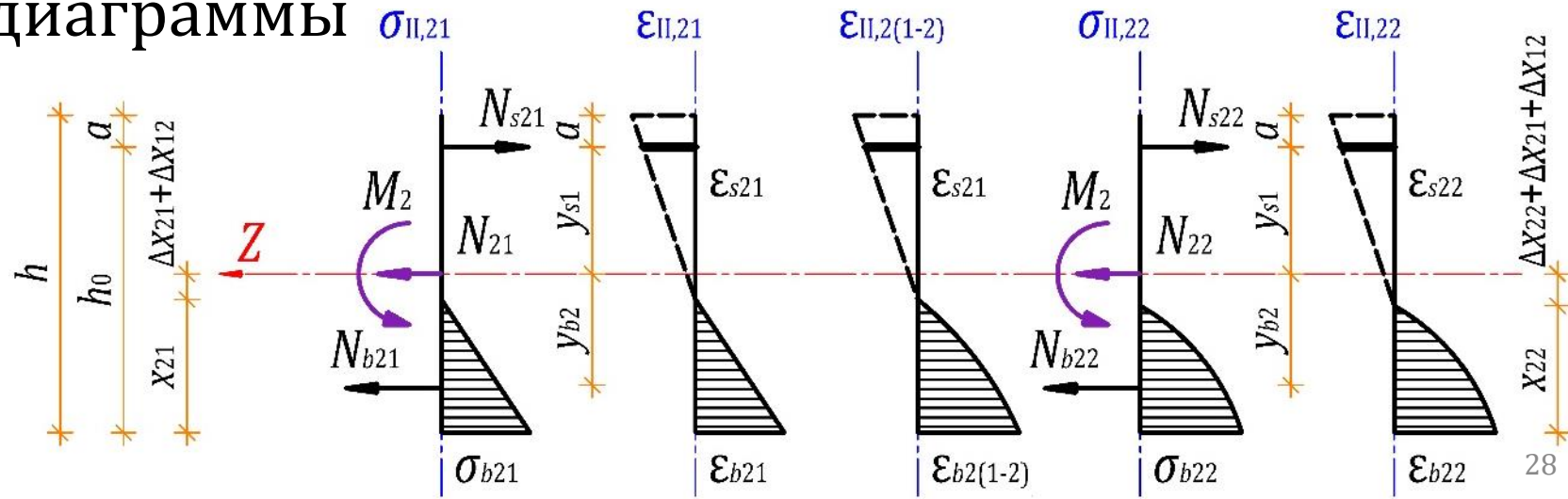


Детализация II стадии НДС в [3]: Стадия II.2

Далее, как на этапе 1.2 стадии II.1, **без роста** внешней нагрузки, сохранении равновесия внешних и внутренних усилий и за счет пластической работы сжатого бетона необходимо учесть развитие продольных относительных деформаций в крайней фибре сжатого бетона с ε_{b21} до $\varepsilon_{b2(1-2)} \leq \varepsilon_{b22}$, дальнейшее уменьшение высоты сжатой зоны бетона с x_{21} до x_{22} на величину Δx_{22} и увеличение нормальных напряжений на крайней фибре сжатого бетона с σ_{b21} до σ_{b22} посредством диаграммы

« σ - ε » и к. ф. k_{22}

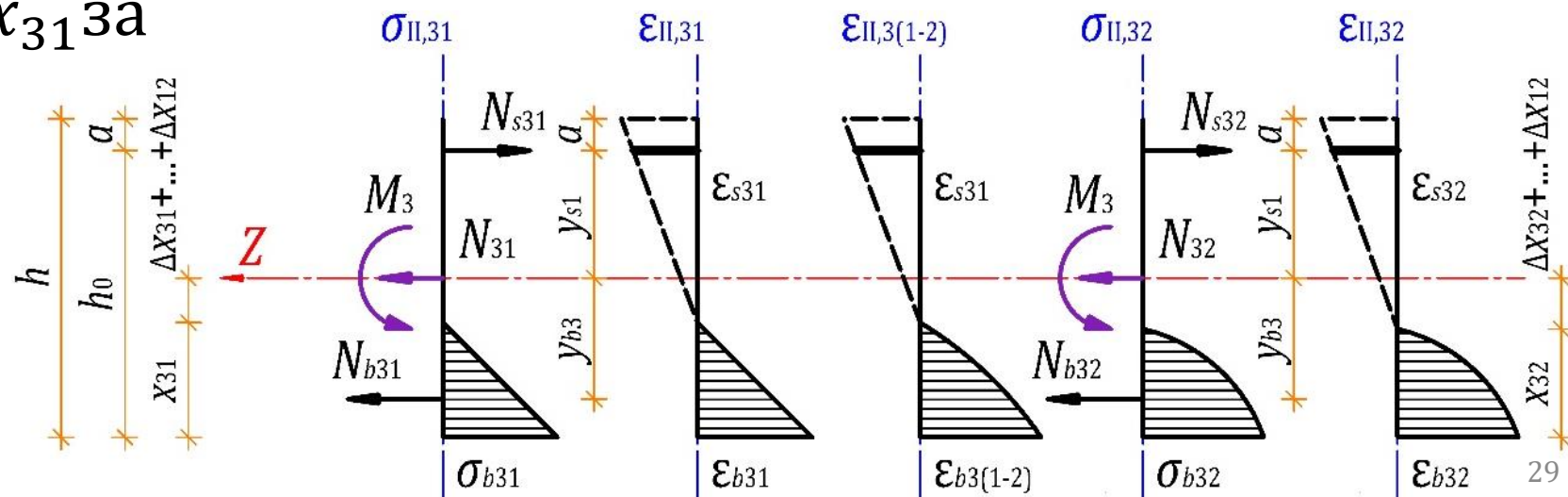
На рисунке показана
Стадия II.2 НДС
Этапы 2.1 и 2.2



Детализация II стадии НДС в [3]: Стадия II.3

Дальнейший рост внешней вертикальной нагрузки за счет других временных длительных нагрузок, вызывающий дальнейшее увеличение равнодействующих внутренних усилий с $N_{s22} = N_{b22} + N_{22}$ до $N_{s31} = N_{b31} + N_{31}$, нормальных напряжений на крайней фибре сжатого бетона с σ_{b22} до σ_{b31} , относительных деформаций в сжатом бетоне с ε_{b22} до ε_{b31} , растянутой арматуры с ε_{s22} до ε_{s31} и прогибов с f_{22} до f_{31} , уменьшение высоты сжатой зоны бетона с x_{22} до x_{31} на величину Δx_{31} за счет к. ф. k_{31}

На рисунке показана
Стадия II.3 НДС
Этапы 3.1 и 3.2

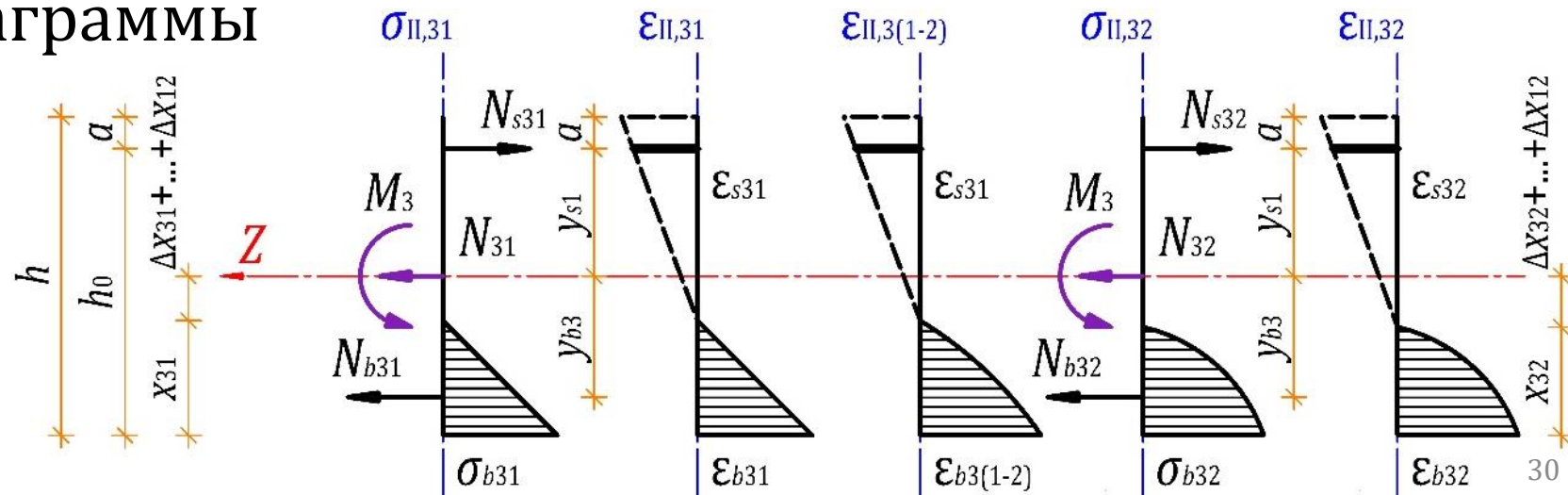


Детализация II стадии НДС в [3]: Стадия II.3

Снова, как на этапе 2.2 стадии II.2, **без роста** внешней нагрузки, сохранении равновесия внешних и внутренних усилий и за счет пластической работы сжатого бетона необходимо учесть развитие продольных относительных деформаций в крайней фибре сжатого бетона с ϵ_{b31} до $\epsilon_{b3(1-2)} \leq \epsilon_{b32}$, дальнейшее уменьшение высоты сжатой зоны бетона с x_{31} до x_{32} на величину Δx_{32} и увеличение нормальных напряжений на крайней фибре сжатого бетона с σ_{b31} до σ_{b32} посредством диаграммы

« σ - ϵ » и к. ф. k_{32}

На рисунке показана
Стадия II.3 НДС
Этапы 3.1 и 3.2



Детализация II стадии НДС в [3]: Стадия II.4.1

Если ползучесть в сжатом бетоне развивается до приложения следующих временных или особых нагрузок, то как и на предыдущем этапе при сохранении равновесия внешних и внутренних усилий в нормальном сечении и за счет ползучести в сжатом бетоне необходимо учесть развитие продольных относительных деформаций в сжатом бетоне с ε_{b32} до ε_{b41} на основе диаграммы ползучести бетона, зависящей от возраста и уровня напряжений, дальнейшее возможное увеличение глубины нормальной трещины, соответствующие этому уменьшение высоты сжатой зоны бетона с x_{32} до x_{41} на величину Δx_{41} и увеличение нормальных напряжений на крайней фибре сжатого бетона с σ_{b32} до σ_{b41} посредством в очередной раз скорректированного *кинематического фактора* k_{41}

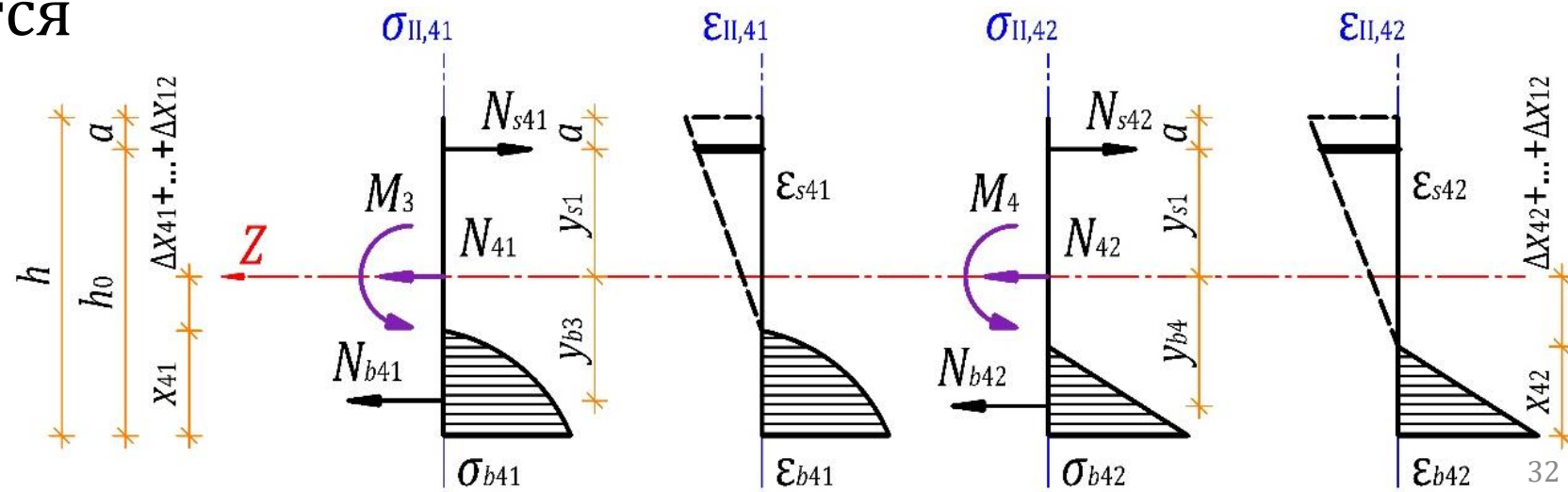
Детализация II стадии НДС в [3]: Стадия II.4.1

При этом прогибы увеличиваются с f_{32} до f_{41} , но равновесие в нормальном сечении между внешней нагрузкой и внутренними усилиями снова сохраняется, т.е. изгибающий момент от внешней нагрузки равен сумме произведений равнодействующих в сжатом бетоне и растянутой арматуре на расстояния до продольной оси:

$M_3 = y_{b3}N_{b41} + y_{s1}N_{s41}$, $N_{s41} = N_{b41} + N_{41}$, кроме того, относительные деформации в растянутой арматуре $\varepsilon_{s32} \cong \varepsilon_{s41}$ и напряжения

$\sigma_{s32} \cong \sigma_{s41}$ изменяются незначительно

На рисунке показана
Стадия II.4 НДС
Этапы 4.1 и 4.2



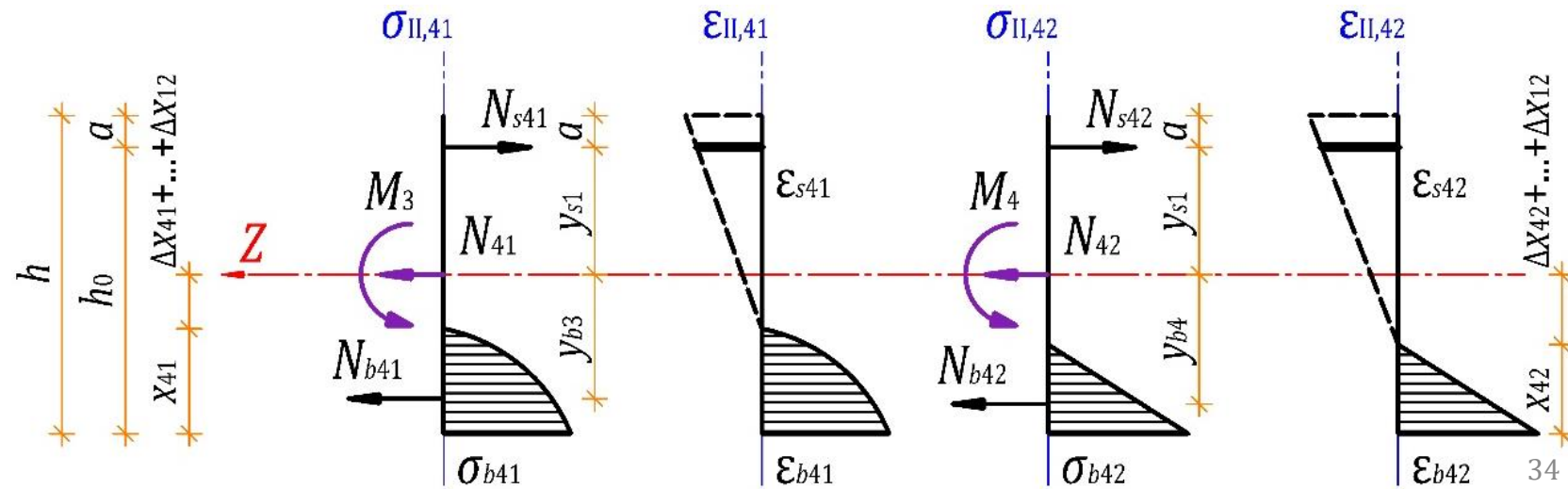
Детализация II стадии НДС в [3]: Стадия II.4.2

Дальнейший рост внешней вертикальной нагрузки за счет разницы между кратковременной и длительной частями временной полезной нагрузки, других кратковременных или особых нагрузок с учетом коэффициентов сочетаний, вызывающий дальнейшее увеличение равнодействующих внутренних усилий с $N_{s32} = N_{b32} + N_{32}$ до $N_{s41} = N_{b41} + N_{41}$ или с $N_{s41} = N_{b41} + N_{41}$ до $N_{s42} = N_{b42} + N_{42}$, нормальных напряжений на крайней фибре сжатого бетона с σ_{b32} до σ_{b41} или с σ_{b41} до σ_{b42} , относительных деформаций в сжатом бетоне с ε_{b32} до ε_{b41} или с ε_{b41} до ε_{b42} , растянутой арматуре с ε_{s32} до ε_{s41} или с ε_{s41} до ε_{s42} и прогибов с f_{32} до f_{41} или с f_{41} до f_{42} , уменьшение высоты сжатой зоны бетона с x_{32} до x_{41} или с x_{41} до x_{42} в зависимости от того, что возникнет раньше, ползучесть или приложение временных или особых нагрузок

Детализация II стадии НДС в [3]: Стадия II.4.2

На этом этапе рассматриваются различные сочетания временных или особых нагрузок уже по отдельности, сгруппированные по одинаковым признакам, например, другие кратковременные нагрузки, действующие непосредственно на балку, отдельно знакопеременные временные воздействия или особые воздействия, действующие на здание или сооружение

На рисунке показана
Стадия II.4 НДС
Этапы 4.2 и 4.1



Переход на IV стадию НДС

Для большинства статически определимых железобетонных балок запроектированных с учетом всех дополнительных конструктивных требований и ограничений СП 63.13330, без перерасхода растянутой арматуры и при обеспечении прочности наклонных сечений на стадии III, предложенной проф. Залесовым А.С. в [6], достижение напряжений в арматуре расчетного сопротивления $\sigma_s = R_s$ является определяющим фактором, свидетельствующем о переходе на следующую стадию IV и начале разрушения балки по нормальным сечениям, такую стадию НДС проф. Мурашев В.И. предложил называть IIa в [5]

Выводы по статье [3]:

- Каждый из известных методов расчета нормальных сечений ж/б балок с трещинами обладает своими недостатками и, тем не менее, используется в строительных нормах. Задача по разработке универсального метода расчета, способного исключить указанные недостатки и объединить преимущества всех известных методов расчета является весьма актуальной
- Стадии НДС совместно с критерием определения расстояния между нормальными трещинами в [1] для разделения стержневых элементов по длине на блоки являются основой для совершенствования и разработки нового метода расчета и механики изгиба железобетонных балок с нормальными трещинами, которые совместно позволят определять фактическое НДС конструкций при массовом проектировании

Расчетная модель железобетонной балки в [4]

С трещинами при плоском изгибе на примере консольной балки из статьи [4], иллюстрируемая в сравнении с традиционными моделями и построенная на основе аппарата современной строительной механики стержневых систем, изложенного в главе 8 учебника [8]:

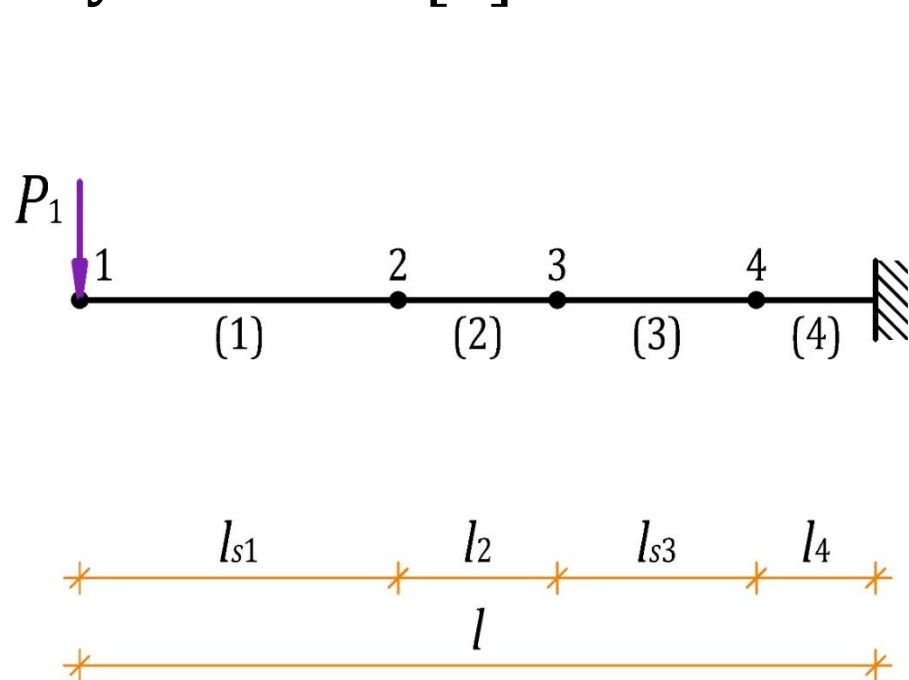


Рис. 1 а)

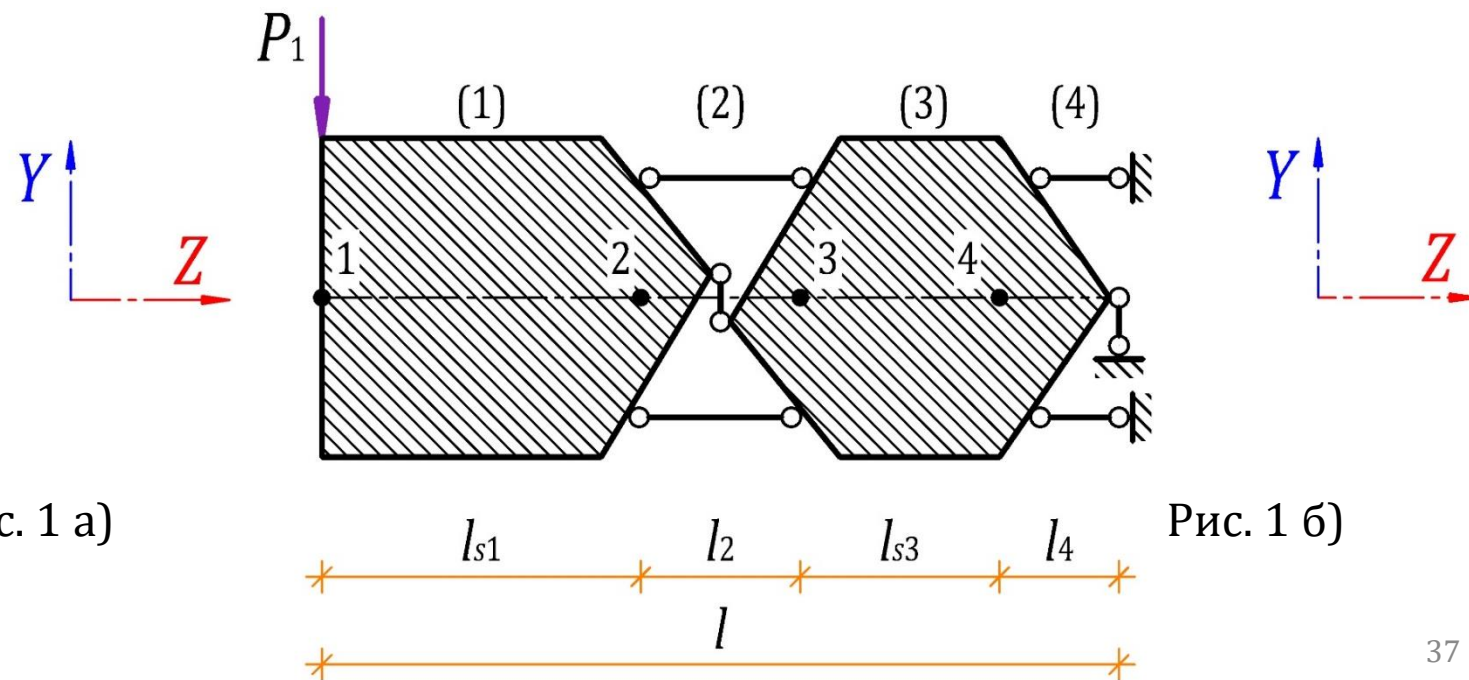


Рис. 1 б)

Описание расчетных моделей балок из [4]:

На рис. 1 а) показана стержневая традиционная аналогия, условно состоящая из 4 стержней, два из которых с номерами (2) и (4), исчезающе малой длины для моделирования нормальных трещин, и 4 узлов, не считая заделку, как это принято в [8]

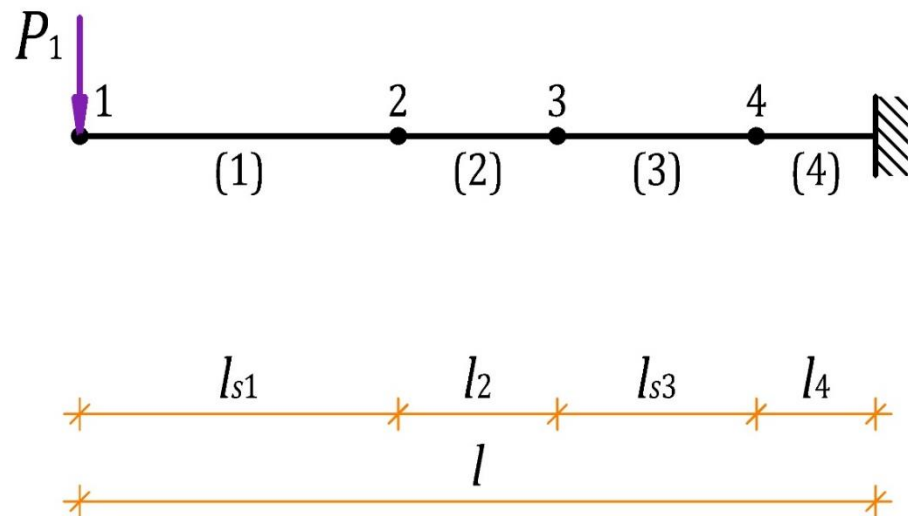


Рис. 1 а)

На рис. 1 б) показана блочно-стержневая модель, условно состоящая из 2 блоков с номерами (1), (3) и 6 стержней – по 3 стержня для каждого нормального сечения, соответствующие стержням (2) и (4)

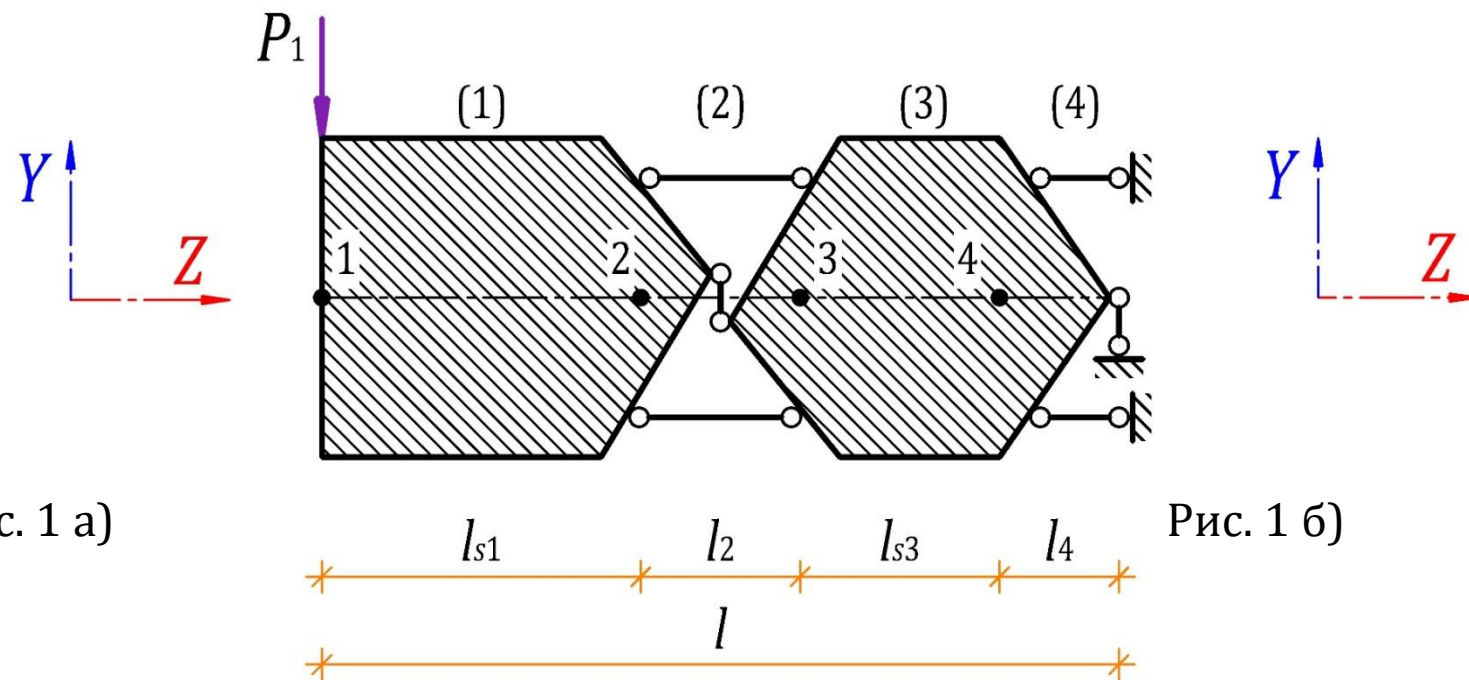


Рис. 1 б)

Полная система уравнений строительной механики [8]

Для всех элементов расчетной модели, показанной на рис. 1, железобетонной балки с нормальными трещинами при плоском изгибе с учетом линейно-ступенчатого нагружения на основе **стадий I и II** (для каждого **1-го этапа**) НДС, т. е. без учета развития пластических деформаций и ползучести, в матричной форме:

где A_{i1} – матрица уравнений равновесия;

\vec{S}_{i1} – вектор внутренних сил;

\vec{P}_i – вектор внешних сил;

A_{i1}^T – матрица уравнений совместности;

\vec{Z}_{i1} – вектор перемещений;

$\vec{\Delta}_{i1}$ – вектор деформаций; B_{i1} – матрица жесткости;

$\vec{\Delta}'_{i1}$ – вектор заданных деформаций, которые могут возникнуть за счет действия температуры, неточности изготовления и т.п.,

везде индекс «1» обозначает каждый 1-й этап на каждой II.i стадии НДС в [3]

$$\begin{cases} A_{i1}\vec{S}_{i1} + \vec{P}_i = 0, & (1) \\ A_{i1}^T\vec{Z}_{i1} + \vec{\Delta}_{i1} = 0, & (2) \\ B_{i1}\vec{S}_{i1} + \vec{\Delta}'_{i1} = \vec{\Delta}_{i1}, & (3) \end{cases}$$

Полная система уравнений строительной механики [8]

С учетом аналогичного линейно-ступенчатого нагружения на основе **стадий II** (для каждого **2-го этапа**) и **IV** НДС, т. е. с учетом развития пластических деформаций и ползучести, в матричной форме:

где \vec{Z}_{i2} – вектор перемещений;

$\vec{\Delta}_{i2}$ – вектор деформаций; B_{i2} – матрица жесткости;

$\vec{\Delta}'_{i2} = \vec{\Delta}'_{i1} + \vec{\Delta}'_{i2pl}(\vec{P}) + \vec{\Delta}'_{4cr}(\vec{P})$ – сумма векторов заданных деформаций, относительных деформаций пластичности и ползучести,

где $\vec{\Delta}'_{i2pl}(\vec{P})$ – вектор относительных деформаций пластичности, вычисляемый по диаграмме « σ - ϵ », как разность соответствующих полных упруго-пластических деформаций и упругих (для каждого первого этапа σ_{bi1} и соответствующем \vec{P}_i);

$\vec{\Delta}'_{4cr}(\vec{P})$ – вектор относительных деформаций ползучести, вычисляемый на основе диаграммы ползучести сжатого бетона на стадии II.3 (при σ_{b32} и соответствующем \vec{P}_3),
везде индекс «2» обозначает каждый 2-й этап на каждой II.i стадии НДС

$$\begin{cases} A_{i2}\vec{S}_{i2} + \vec{P}_i, & (4) \\ A_{i2}^T\vec{Z}_{i2} + \vec{\Delta}_{i2} = 0, & (5) \\ B_{i2}\vec{S}_{i2} + \vec{\Delta}'_{i2} = \vec{\Delta}_{i2}, & (6) \end{cases}$$

Преобразование матриц A , A^T , B_i для стержней (2) и (4)

Расчетной модели, показанной на рис. 1 а), с учетом предложенной трансформации, показанной на рис. 1 б), когда вместо одного стержня с жесткими концами и тремя внутренними усилиями (N_j , Q_j , M_{kj}) будут использоваться три шарнирных стержня, каждый только с одним внутренним усилием (N_{sj} , Q_j , N_{bj})

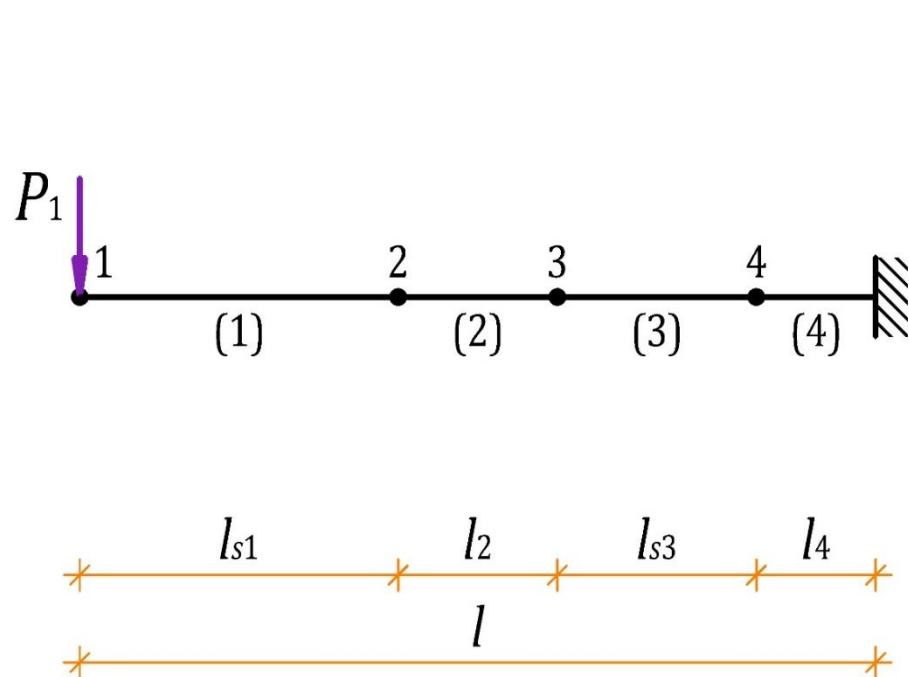


Рис. 1 а)

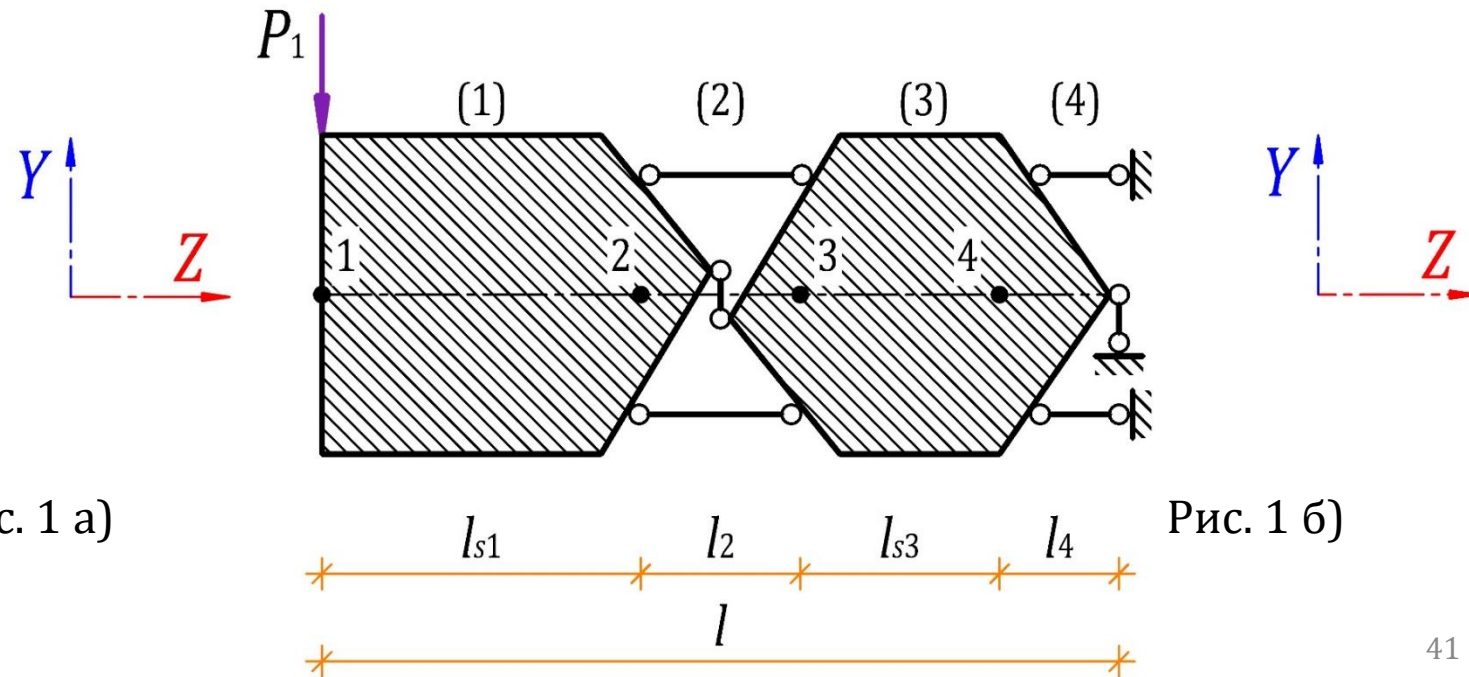


Рис. 1 б)

Физические уравнения

Отдельно взятого стержня, приведенные в параграфе 8.4 учебника [8], которые получены на основе интеграла Мора с использованием формулы Симпсона и используются для обычных стержней (1) и (3) на рис. 1 а) и блоков (1) и (3) на рис. 1 б):

где Δl_j – удлинение или укорочение j -го стержня;
 l_j – длина j -го стержня;
 $\Delta\varphi_{Hj}$ – угол поворота начала j -го стержня; $\Delta\varphi_{Kj}$ – угол поворота конца j -го стержня;
 E_{bj} – начальный модуль упругости бетона j -го стержня;
 I_{bj} – момент инерции сечения бетона j -го стержня без учета нормальной трещины;

$$\vec{\Delta}_j = b_j \vec{S}_j, \quad (7)$$

$$\vec{\Delta}_j = \begin{bmatrix} \Delta l_j \\ \Delta\varphi_{Hj} \\ \Delta\varphi_{Kj} \end{bmatrix}, \quad b_j = \begin{bmatrix} \frac{l_j}{E_{bj}F_{bj}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{l_j}{3E_{bj}I_{bj}} & \frac{l_j}{6E_{bj}I_{bj}} \\ 0 & \frac{l_j}{6E_{bj}I_{bj}} & \frac{l_j}{3E_{bj}I_{bj}} \end{bmatrix}, \quad \vec{S}_j = \begin{bmatrix} N_j \\ M_{Hj} \\ M_{Kj} \end{bmatrix}, \quad (8)$$

N_j – продольное внутреннее усилие в j -м стержне;
 M_{Hj} – изгибающий момент в начале j -го стержня;
 M_{Kj} – изгибающий момент в конце j -го стержня

Замена M_{Hj} на Q_j в физических уравнениях

Выразим M_{Hj} через поперечную силу Q_j , действующую в j -м стержне, и M_{Kj} :

$$M_{Hj} = M_{Kj} - Q_j l_j, \quad (9)$$

подставим выражение (9) в фор. (8.43) и (8.44) из [8], получим:

$$\Delta\varphi_{Hj} = -\frac{l_j^2}{3E_{bj}I_{bj}} Q_j + \frac{l_j}{2E_{bj}I_{bj}} M_{Kj}, \quad (10)$$

$$\Delta\varphi_{Kj} = -\frac{l_j^2}{6E_{bj}I_{bj}} Q_j + \frac{l_j}{2E_{bj}I_{bj}} M_{Kj}, \quad (11)$$

Преобразование физических уравнений (8)

Перепишем векторы и матрицу $\vec{\Delta}_j$, b_j , \vec{s}_j фор. (8) с учетом выражений (10) и (11):

где Δl_j – удлинение или укорочение j -го стержня;

l_j – длина j -го стержня;

$\Delta\varphi_{Hj}$ – угол поворота начала j -го стержня;

$\Delta\varphi_{Kj}$ – угол поворота конца j -го стержня;

E_{bj} – начальный модуль упругости бетона j -го стержня;

I_{bj} – момент инерции сечения бетона j -го стержня без учета нормальной трещины;

$$\vec{\Delta}_j = \begin{bmatrix} \Delta l_j \\ \Delta\varphi_{Hj} \\ \Delta\varphi_{Kj} \end{bmatrix}, \quad b_j = \begin{bmatrix} \frac{l_j}{E_{bj}F_{bj}} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{l_j^2}{3E_{bj}I_{bj}} & \frac{l_j}{2E_{bj}I_{bj}} \\ 0 & -\frac{l_j^2}{6E_{bj}I_{bj}} & \frac{l_j}{2E_{bj}I_{bj}} \end{bmatrix}, \quad \vec{s}_j = \begin{bmatrix} N_j \\ Q_j \\ M_{Kj} \end{bmatrix}, \quad (12)$$

N_j – продольное внутреннее усилие в j -м стержне;

Q_j – поперечная сила в j -м стержне;

M_{Kj} – изгибающий момент в конце j -го стержня

Трансформация физических уравнений (12)

Для групповых идеализированных стержней (2) и (4), состоящих каждый из трех шарнирных стержней и показанных на рис. 1 б):

где $\Delta l_{sj}, l_{sj}, E_{sj}, A_{sj}$ – удлинение, длина, модуль упругости и площадь j -й арматуры, соответственно;

$\Delta l_{Qj}, l_{Qj}, E_{bj}, F_{bj}$ – удлинение, длина, модуль упругости и площадь j -го поперечного стержня, соответственно;

$\Delta l_{bj}, l_{bj}, E_{bj}, A_{bj}$ – удлинение, длина, модуль упругости и площадь j -й сжатой зоны бетона, соответственно;

$$\vec{\Delta}_j = \begin{bmatrix} \Delta l_{sj} \\ \Delta l_{Qj} \\ \Delta l_{bj} \end{bmatrix}, \quad b_j = \begin{bmatrix} \frac{l_{sj}}{E_{sj}A_{sj}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{l_{Qj}}{E_{bj}F_{bj}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{l_{bj}}{E_{bj}A_{bj}} \end{bmatrix}, \quad \vec{s}_j = \begin{bmatrix} N_{sj} \\ Q_j \\ N_{bj} \end{bmatrix}, \quad (13)$$

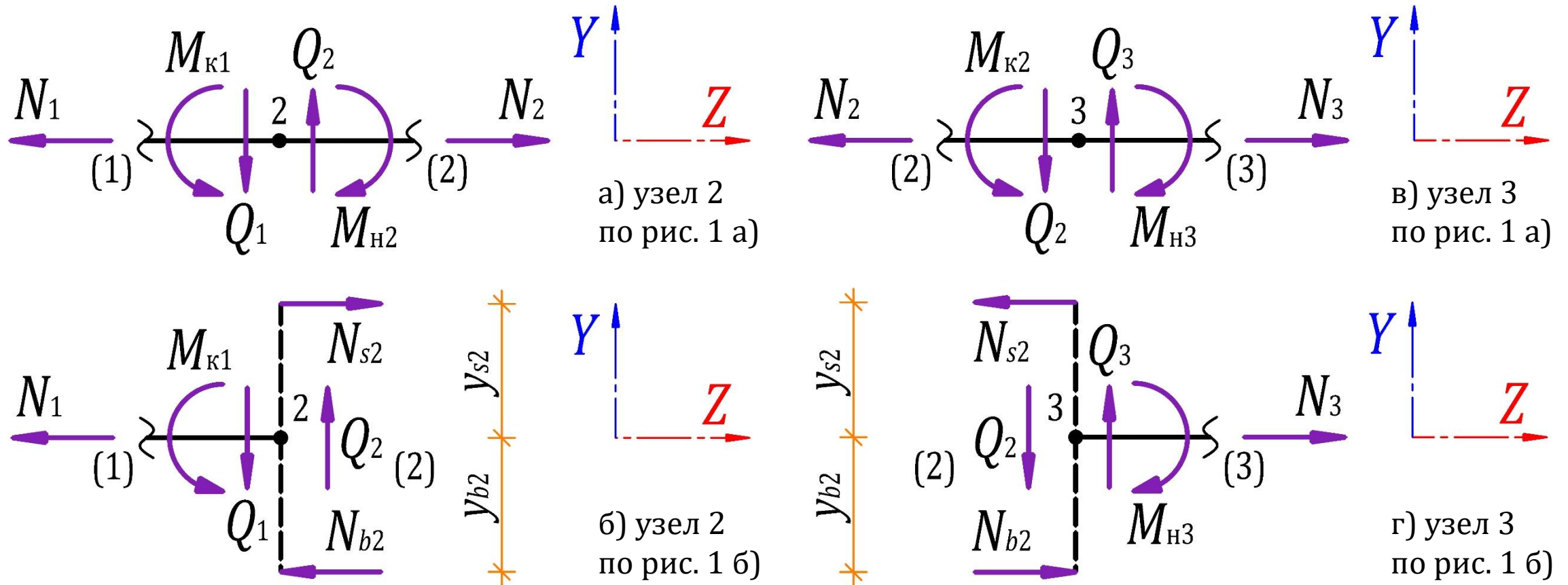
N_{sj} – продольное усилие в j -й арматуре;

Q_j – поперечная сила в j -м стержне;

N_{bj} – продольное усилие в j -й сжатой зоне бетона

На рис. 2 показаны узлы 2 и 3

С внутренними усилиями в стержнях (1), (2), (3) для расчетных моделей на рис. 1 а) и б), находящимися в равновесии



Матрица уравнений равновесия A по (8) – рис. 1 а)

№ узла		\vec{s}_1			\vec{s}_2			\vec{s}_3			\vec{s}_4			\vec{P}_i
		N_1	M_{H1}	M_{K1}	N_2	M_{H2}	M_{K2}	N_3	M_{H3}	M_{K3}	N_4	M_{H4}	M_{K4}	
1	ΣZ													
	ΣY													$-P_1$
	ΣM													
2	ΣZ													
	ΣY													
	ΣM			-1		1								
3	ΣZ													
	ΣY													
	ΣM						-1		1					
4	ΣZ													
	ΣY													
	ΣM									-1		1		

Или с учетом выражения (12), где $Q_j = (M_{Kj} - M_{Hj})/l_j$:

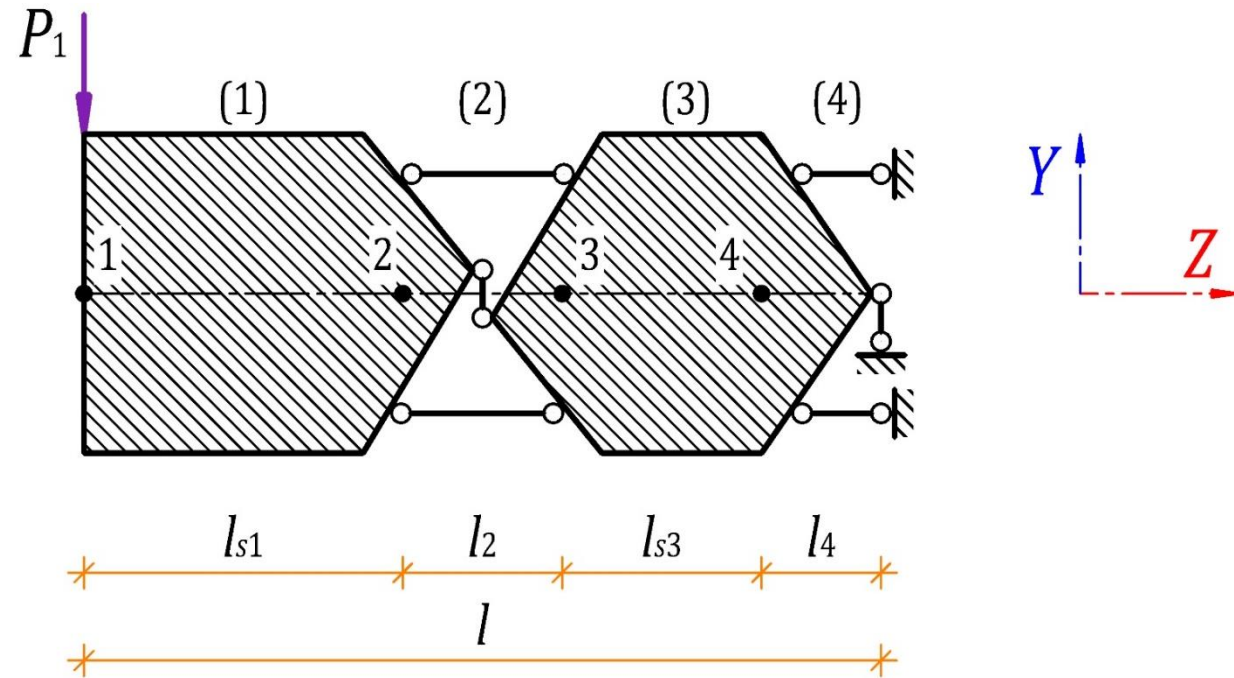
№ узла		\vec{s}_1			\vec{s}_2			\vec{s}_3			\vec{s}_4			\vec{P}_i
		N_1	Q_1	M_{K1}	N_2	Q_2	M_{K2}	N_3	Q_3	M_{K3}	N_4	Q_4	M_{K4}	
1	ΣZ													
	ΣY		1											$-P_1$
	ΣM													
2	ΣZ													
	ΣY		-1			1								
	ΣM			-1										
3	ΣZ													
	ΣY					-1			1					
	ΣM						-1							
4	ΣZ													
	ΣY								-1			1		
	ΣM									-1				

Матрица уравнений равновесия A по (13) – рис. 1 б)

№ узла		\vec{s}_1			\vec{s}_2			\vec{s}_3			\vec{s}_4			\vec{P}_i
		N_1	Q_1	M_{K1}	N_{s2}	Q_2	N_{b2}	N_3	Q_3	M_{K3}	N_{s4}	Q_2	N_{b4}	
1	ΣZ													
	ΣY		1											$-P_1$
	ΣM													
2	ΣZ				1		-1							
	ΣY		-1			1								
	ΣM			-1	y_{s2}		y_{b2}							
3	ΣZ				-1		1							
	ΣY					-1		1						
	ΣM				$-y_{s2}$		$-y_{b2}$							
4	ΣZ										1		-1	
	ΣY								-1			1		
	ΣM									-1	y_{s4}		y_{b4}	

Для решения системы уравнений (1-6)

Необходимо определить начальные длины элементов сжатого бетона l_{bj} и растянутой арматуры l_{sj} , входящие в выражение (13), на основе предельной сжимаемости бетона с учетом пластических деформаций и ползучести и заодно выбрать приемлемые диаграммы « σ - ε » для выполнения квазинелинейно-ступенчатого расчета



$$\begin{cases} A_{i1} \vec{S}_{i1} + \vec{P}_i = 0, & (1) \\ A_{i1}^T \vec{Z}_{i1} + \vec{\Delta}_{i1} = 0, & (2) \\ B_{i1} \vec{S}_{i1} + \vec{\Delta}'_{i1} = \vec{\Delta}_{i1}, & (3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_{i2} \vec{S}_{i2} + \vec{P}_i, & (4) \\ A_{i2}^T \vec{Z}_{i2} + \vec{\Delta}_{i2} = 0, & (5) \\ B_{i2} \vec{S}_{i2} + \vec{\Delta}'_{i2} = \vec{\Delta}_{i2}, & (6) \end{cases}$$

Диаграмма « σ - ε » для сжатого бетона

Предлагается на основе модификации диаграммы согласно п. 3.1.7 Еврокод 2 для расчета сечений, но с заменой ε_{c2} на ε_{cu2} и далее ε_{cu2} на ε_{b2} (на предельную относительную деформацию по табл. 6.10 СП 63.13330.2018, т. е. с учетом продолжительного действия нагрузки), тогда получим полную продольную относительную деформацию крайней фибры сжатой зоны бетона на 2 этапе каждой стадии II НДС:

$$\varepsilon_{bi2} = \varepsilon_{b2} \left(1 - \sqrt[n]{1 - \frac{\sigma_{bi1}}{R_b}} \right), \quad (14)$$

где ε_{b2} – предельная относительная деформация бетона при сжатии с учетом нагрузок продолжительного действия;

$n = 2$ для бетонов классов В60 и ниже, при увеличении класса бетона n снижается по аналогии с табл. 3.1 Еврокод 2;

σ_{bi1} – нормальные напряжения в сжатом бетоне, полученные на соответствующем 1-м этапе стадий II НДС, рассмотренных ранее в статье [2].

Диаграмма « σ - ε » для арматуры

Предлагается на основе модификации билинейной диаграммы (Прандтля), использованной в п. 6.2.14 СП 63.13330.2018, и аппроксимации Анри Паде после корректировки значений предельной относительной деформации с $\varepsilon_{s2} = \mathbf{0,025}$ до $\varepsilon_{s2} = \mathbf{0,0025}$ на основе проведенных ранее многочисленных экспериментов в НИИЖБ, указанных в статье [2], с доведением различных железобетонных балок до разрушения или с заменой горизонтального сегмента на наклонный (т. е. с некоторым упрочнением) и ε_{s2} на ε_{ud} , определяемый согласно п. 3.2.7 Еврокод 2

Длины сжатых l_{bj} и растянутых l_{sj} элементов

Вычисляются на основе предельной относительной деформации сжатого бетона ε_{b2} на стадии IV и среднеарифметической длины двух смежных с нормальной трещиной элементов l_{sj-1} и l_{sj+1} , например, (1) и (3) показанных на рис. 1 и полученной на основе деформационного критерия в статье [1], по формуле:

$$l_{bj} = \varepsilon_{b2}(l_{sj-1} + l_{sj+1})/2, \quad (15)$$

и на основе продольной относительной деформации в сжатом бетоне ε_{b0} на стадии II.0 (в момент образования нормальных трещин) и среднеарифметической длины двух смежных с нормальной трещиной элементов l_{sj-1} и l_{sj+1} по формуле:

$$l_{sj} = \varepsilon_{b0}(l_{sj-1} + l_{sj+1})/2, \quad (16)$$

очевидно, что длины l_{bj} и l_{sj} не могут быть одинаковыми, и на рис. 1 б) показаны равной длины условно, для наглядности

Эпюры сжатой зоны бетона

Для выполнения квазинелинейно-ступенчатого расчета на основе уравнений (1-6) необходимо условно перейти от треугольной эпюры сжатой зоны бетона к равнодействующей прямоугольной эпюре для определения площади сжатой зоны бетона A_{bj} в выражении (13) с помощью статического эквивалента и следующих формул:

$$N_{bji} = \sigma_{bji} b x_{ji} / 2, \quad (17)$$

$$N_{bji} = \sigma_{bji,red} b x_{ji,red}, \quad (18)$$

$$x_{ji,red} = 2x_{ji} / 3, \quad (19)$$

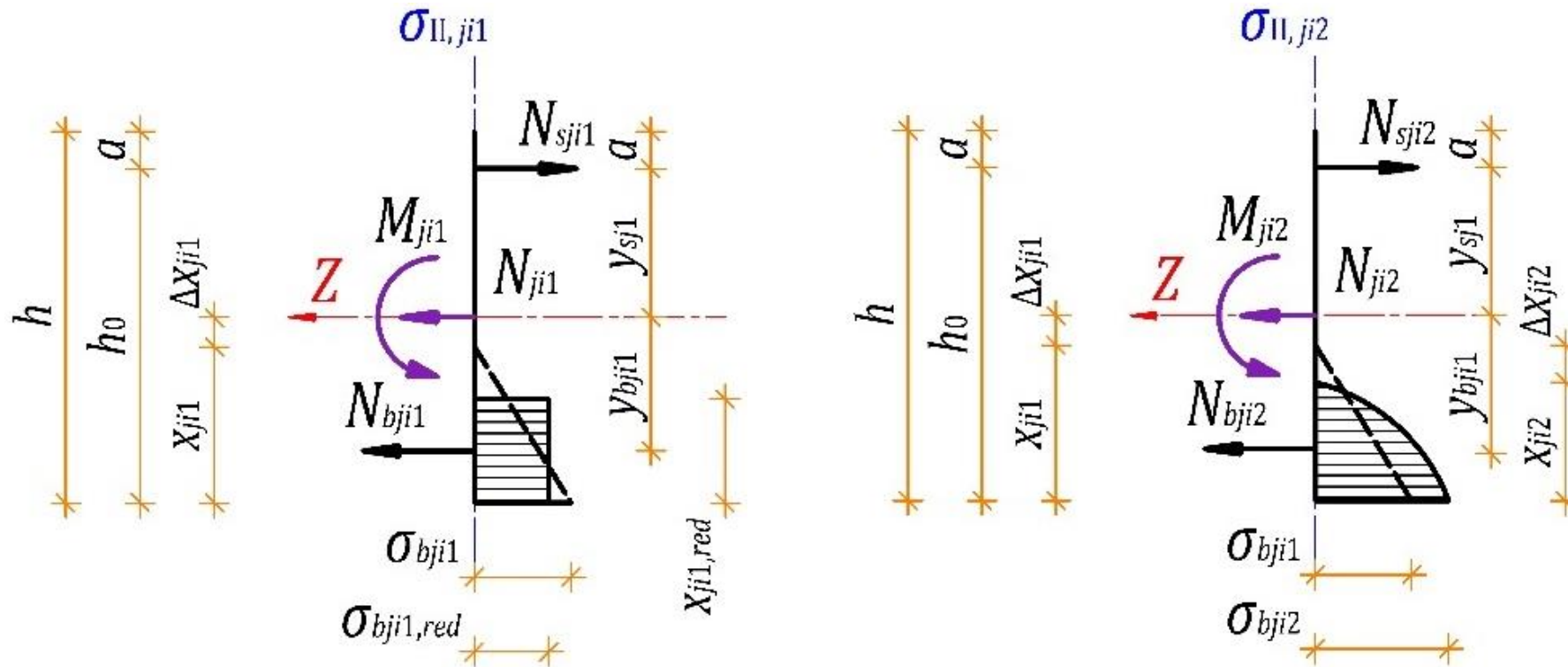
$$A_{bji} = x_{ji,red} b = 2x_{ji} b / 3, \quad (20)$$

где x_{ji} и σ_{bji} – фактические высота треугольной эпюры и нормальные напряжения в крайней фибре сжатого бетона j -го стержня, соответствующие 1-му этапу каждой стадии II НДС;

$x_{ji,red}$ и $\sigma_{bji,red}$ – приведенные эквивалентные высота прямоугольной эпюры сжатой зоны и равномерно распределенные по ней нормальные напряжения бетона j -го стержня, соответствующие 1-му этапу каждой стадии II НДС

Рис. 3 – графическая иллюстрация эпюр и фор. (17-20)

$x_{bji,red}$ и $\sigma_{bji,red}$ – приведенные характеристики прямоугольной эпюры
 x_{bji1} и σ_{bji1} – исходные характеристики треугольной эпюры



а) для j -го стержня на этапе 1
при увеличении нагрузки

б) для j -го стержня на 2 этапе при развитии
пластических деформаций и ползучести

Универсальный кинематический фактор k_{ji1} или k_{ji2}

Используется для корректировки высоты сжатой зоны бетона при *увеличении нагрузки* или *росте пластических деформаций и ползучести*, соответственно, где индекс «*i*» это этап II стадии НДС, «*j*» – номер стержня, моделирующего нормальную трещину. Для определения k_{ji2} рассмотрим треугольные эпюры относительных продольных деформаций сжатой зоны бетона ε_{bji1} и $\varepsilon_{bji(1-2)}$ на рис. 4 а) и запишем следующие формулы:

$$tg\gamma_{bji1} = \varepsilon_{bji1}/x_{ji1}, \quad (21)$$

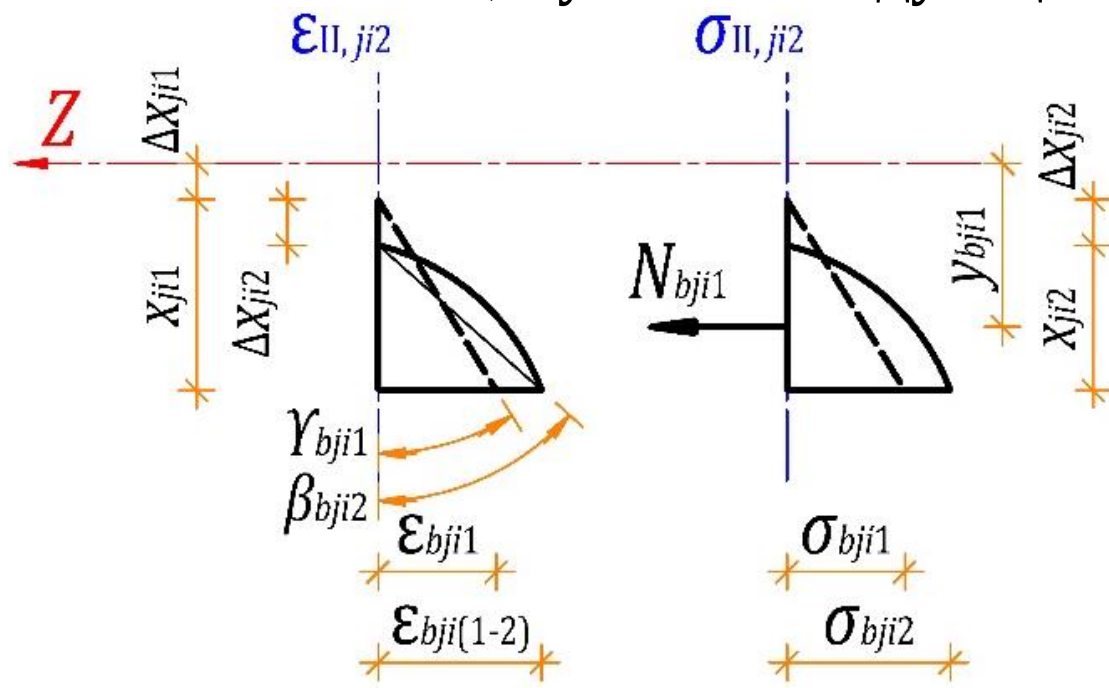
где ε_{bji1} и x_{ji1} – относительная продольная упругая деформация крайней фибры сжатой зоны, соответствующая σ_{bji1} , и высота треугольной эпюры бетона перед каждым 2-м этапом стадии II.*i* НДС; γ_{bji1} – угол наклона в упругой стадии,

$$tg\beta_{bji2} = \varepsilon_{bji(1-2)}/x_{ji2} = \varepsilon_{bji(1-2)}/(x_{ji1} - \Delta x_{ji2}), \quad (22)$$

где $\varepsilon_{bji(1-2)}$ и $x_{ji2} = (x_{ji1} - \Delta x_{ji2})$ – относительная продольная полная деформация крайней фибры сжатой зоны, соответствующая σ_{bji1} , и высота треугольной эпюры бетона на каждом 2-м этапе стадии II.*i* НДС; β_{bji2} – угол наклона отрезка, соединяющего крайние точки криволинейной эпюры в упругопластической стадии

Допущение для определения k_{ji2}

Высота сжатой зоны бетона x_{ji2} на каждом 2-м этапе стадии II.i НДС определяется на основе полной продольной относительной деформации крайней фибры сжатой зоны бетона $\varepsilon_{bji(1-2)}$, длины $l_{sj,min}$, соответствующей меньшему из двух смежных с нормальной трещиной элементов, и приращения угла наклона $\varphi_{ji(1-2)}$ его продольной оси между 1-м и 2-м этапами стадии II.i НДС, полученного на основе решения систем уравнений (1-3) и (4-5), соответственно, с учетом следующих преобразований:



$$\varphi_{ji(1-2)} = \beta_{bji2} - \gamma_{bji1} \quad \text{или}$$

$$\beta_{bji2} = \gamma_{bji1} + \varphi_{ji1} \quad (23)$$

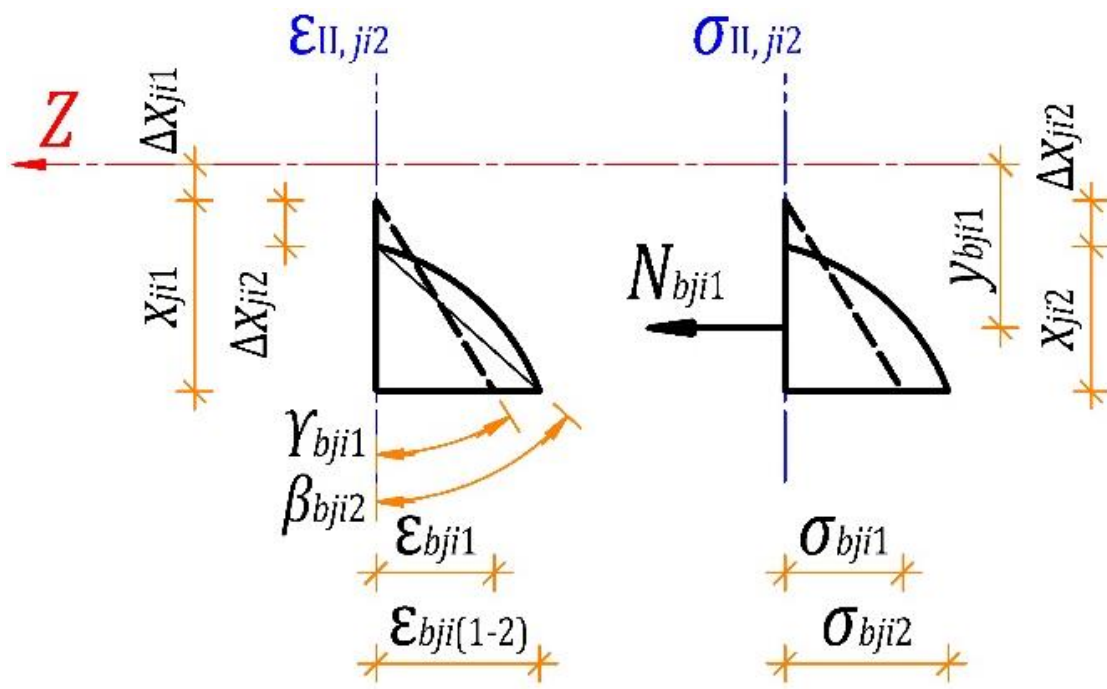
Рис. 4 – Кинематический фактор изменения высоты сжатой зоны бетона k_{ji2} и k_{ji1} :

а) k_{ji2} для j -го стержня на 2-м этапе стадии II.i НДС при развитии пластических деформаций

Определение кинематического фактора k_{ji2}

Тогда искомая высота треугольной эпюры сжатой зоны бетона x_{ji2} на каждом 2-м этапе стадии II.i НДС с учетом (22) и (23) вычисляется по формуле:

$$x_{ji2} = \frac{\varepsilon_{bji(1-2)}}{tg\beta_{bji2}} = \frac{\varepsilon_{bji(1-2)}}{tg(\gamma_{bji1} + \varphi_{ji(1-2)})} = \frac{\varepsilon_{bji(1-2)}(1 - tg\gamma_{bji1}tg\varphi_{ji(1-2)})}{tg\gamma_{bji1} + tg\varphi_{ji(1-2)}} = \frac{\varepsilon_{bji(1-2)}(x_{ji1}l_{sj,min} - \varepsilon_{bji1}\Delta f_{ji(1-2)})}{\varepsilon_{bji1}l_{sj,min} + x_{ji1}\Delta f_{ji(1-2)}}, \quad (24)$$



где $tg\varphi_{ji(1-2)} = \Delta f_{ji(1-2)}/l_{sj,min}$ – тангенс приращения угла наклона $\varphi_{ji(1-2)}$ продольной оси смежного с нормальной трещиной элемента меньшей длины $l_{sj,min}$ между 1-м и 2-м этапами стадии II.i НДС, полученного на основе решения систем уравнений (1-3) и (4-5);

$\Delta f_{ji(1-2)}$ – разница прогибов между началом и концом j -го стержня, определяемая на 1-м и 2-м этапах стадии II.i НДС.

Определение кинематического фактора k_{ji1}

Выполняется аналогично k_{ji2} с учетом ε_{bj2} на предыдущем этапе и увеличения до $\varepsilon_{bj(i+1)1}$ на следующем этапе в связи с приращением нагрузки путем взаимной перестановки индексов «1» и «2» по формуле:

$$x_{ji1} = \frac{\varepsilon_{bj(i+1)1}}{tg\beta_{bji1}} = \frac{\varepsilon_{bj(i+1)1}}{tg(\gamma_{bji2} + \varphi_{ji(2-1)})} = \frac{\varepsilon_{bj(i+1)1}(1 - tg\gamma_{bji2}tg\varphi_{ji(2-1)})}{tg\gamma_{bji2} + tg\varphi_{ji(2-1)}} =$$

$$= \frac{\varepsilon_{bj(i+1)1}(x_{ji2}l_{sj,min} - \varepsilon_{bj2}\Delta f_{ji(2-1)})}{\varepsilon_{bj2}l_{sj,min} + x_{ji2}\Delta f_{ji(2-1)}}, \quad (25)$$

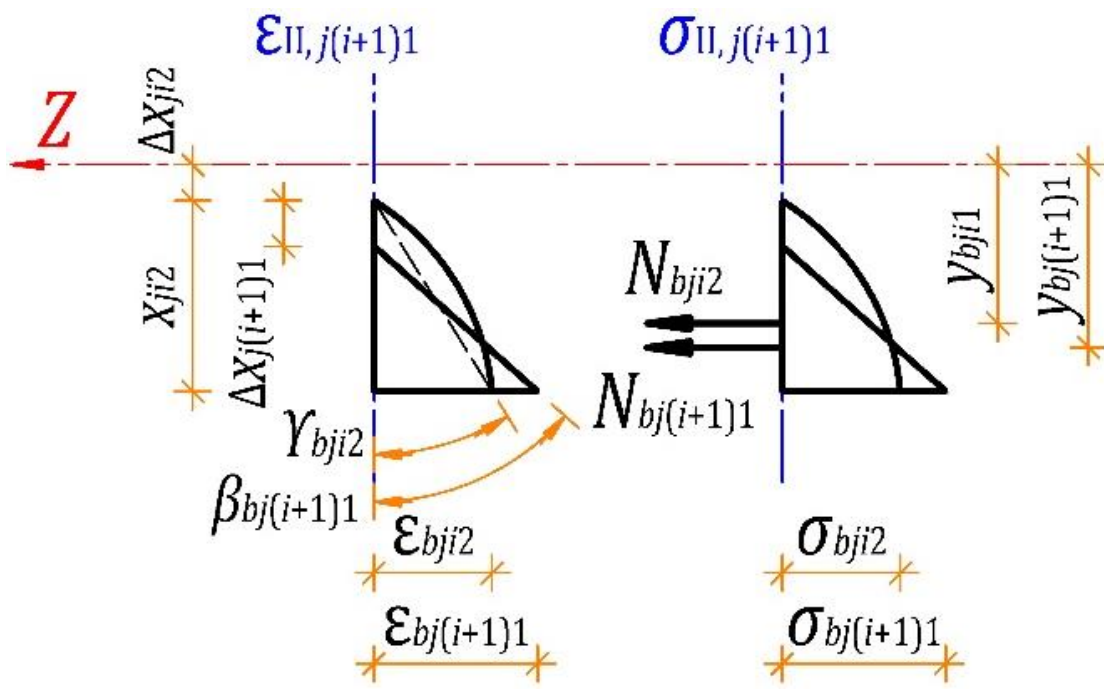


Рис. 4 – Кинематический фактор изменения высоты сжатой зоны бетона k_{ji2} и k_{ji1} :

б) k_{ji1} для j -го стержня на 1-м этапе стадии II.i НДС при увеличении нагрузки и плеча

Диаграмма « σ - ϵ » для крайней фибры сжатого бетона

При изгибе железобетонной балки отличается от аналогичной диаграммы « σ - ϵ » при одноосном сжатии бетонной призмы, кубика или цилиндра, поскольку на ней будут образовываться диагональные скачки нормальных напряжений с σ_{bi1} до σ_{bi2} в связи с развитием пластических деформаций на каждом 2-м этапе стадии II.i НДС и ползучести на стадии II.4 в сжатой зоне бетона вместе с уменьшением высоты сжатой зоны за счет *кинематического фактора*, что проиллюстрировано на рис. 5

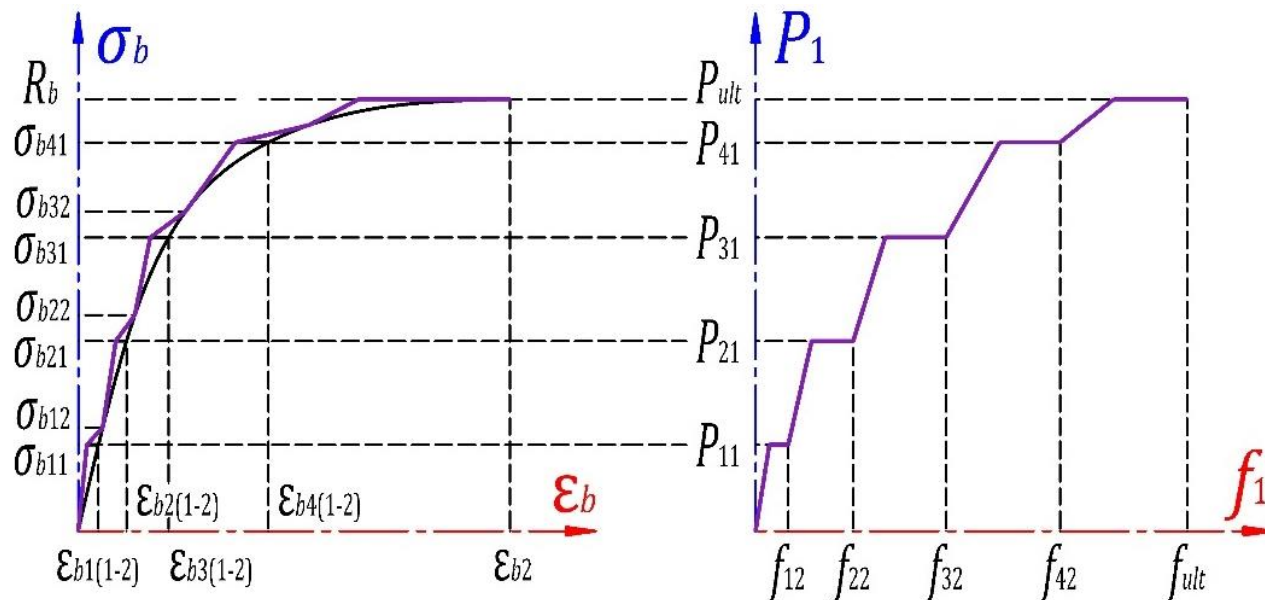


Рис. 5 – Диаграммы « σ - ϵ » на основе фор. (14) для стержня (4) и « P_1 - f_1 » узла 1 на рис. 1 при выполнении квазинелинейно-ступенчатого расчета (на оси продольных относительных деформаций условно показаны значения $\epsilon_{bi(1-2)}$ только для каждого 2-го этапа стадии II.i НДС без учета снижения высоты сжатой зоны бетона)

Заключительные положения и комментарии:

1. Последовательность квазинелинейно-ступенчатого расчета:

1.1. Выполнение традиционного линейного упругого расчета на комбинацию вертикальных постоянных и кратковременных нагрузок для определения и задания параметров армирования балок в первом приближении;

1.2. Выполнение традиционного линейного расчета при действии постоянных нагрузок от собственного веса балки и других конструкций, соответствующего стадиям I, II.0-II.2 НДС, для определения положения нормальных трещин по длине балки на основе деформационного критерия в статье [1], минимального нагрузочного эффекта $M_{j1} = M_{j,crc}$ для определения вектора \vec{P}_1 , соответствующего высоте сжатой зоны бетона $x_{j11} \cong h/2$ и глубине нормальной трещины $y_{j11,crc} \cong y_{jt} \cong h/2$ согласно указаний в статье [1], добавления спаренных промежуточных узлов и групп шарнирных стержней, моделирующих нормальные сечения с трещинами, формирования матриц: A_{11} , A_{11}^T и B_{11} на основе параметров: l_{bj11} , u_{bj11} , l_{sj11} , u_{sj11} , $x_{j11,red}$ и A_{bj11} по фор. (15-20);

Последовательность квазинелинейно-ступенчатого расчета:

1.3. Выполнение этапа II.1.1 нелинейно-ступенчатого расчета с нагрузками на стадиях I и II.1 НДС в виде вектора \vec{P}_1 и матрицами: A_{11} , A_{11}^T и B_{11} путем решения системы уравнений (1-3) для определения векторов: \vec{S}_{11} , $\vec{\Delta}_{11}$, \vec{Z}_{11} и их параметров в нормальных сечениях с трещинами: $N_{sj11} = N_{bj11}$, σ_{sj11} , Δl_{sj11} , $\sigma_{bj11,red}$, Δl_{bj11} , f_{j11} для последующего возможного уточнения эквивалентных характеристик: σ_{bj11} , ε_{bj11} и x_{j11} по фор. (17-20), относительной продольной деформации в крайней фибре сжатого бетона $\varepsilon_{bj1(1-2)}$ и секущего модуля деформаций $E_{bj1(1-2)}$ с учетом пластической работы по диаграмме « σ - ε » и фор. (14), нахождения других параметров фор. (24) для определения x_{j12} на основе *кинематического фактора* k_{j12} (рост пластических деформаций) и формирования матриц: A_{12} , A_{12}^T и B_{12} (замена E_{bj11} на E_{bj12}) для следующего этапа расчета;

Последовательность квазинелинейно-ступенчатого расчета:

1.4. Выполнение этапа II.1.2 нелинейно-ступенчатого расчета на основе результатов вычислений предыдущего этапа II.1.1 с матрицами: A_{12} , A_{12}^T и B_{12} и вектором \vec{P}_1 путем решения системы уравнений (4-6) для определения векторов: \vec{S}_{12} , $\vec{\Delta}_{12}$, \vec{Z}_{12} и их параметров в нормальных сечениях с трещинами: $N_{sj12} = N_{bj12} + N_{j12}$, σ_{sj12} , Δl_{sj12} , $\sigma_{bj12,red}$, Δl_{bj12} , f_{j12} и формирования матриц: A_{13} , A_{13}^T и B_{13} (с учетом замены на $x_{j12,red}$, A_{bj12}) для следующего этапа расчета;

1.5. Выполнение этапа II.2.0 нелинейно-ступенчатого расчета с нагрузками на стадии II.2 НДС в виде вектора \vec{P}_2 и матрицами: A_{13} , A_{13}^T и B_{13} путем решения системы уравнений (1-3) для определения векторов: \vec{S}_{20} , $\vec{\Delta}_{20}$, \vec{Z}_{20} и их параметров в нормальных сечениях с трещинами: $N_{sj20} = N_{bj20} + N_{j20}$, σ_{sj20} , Δl_{sj20} , $\sigma_{bj20,red}$, Δl_{bj20} , f_{j20} для последующего определения эквивалентных характеристик: σ_{bj20} , ϵ_{bj20} и других параметров фор. (25) для определения x_{j21} на основе *кинематического фактора* k_{j21} (при увеличении нагрузки) и формирования матриц: A_{21} , A_{21}^T и B_{21} (с учетом замены на $x_{j21,red}$, A_{bj21}) для следующего этапа расчета;

Последовательность квазинелинейно-ступенчатого расчета:

1.6. Выполнение этапа II.2.1 нелинейно-ступенчатого расчета на основе результатов вычислений предыдущего этапа II.2.0 и матрицами: A_{21} , A_{21}^T и B_{21} путем решения системы уравнений (1-3) для определения векторов \vec{S}_{21} , $\vec{\Delta}_{21}$, \vec{Z}_{21} и их параметров в нормальных сечениях с трещинами: $N_{sj21} = N_{bj21} + N_{j21}$, u_{bj21} (корректировка положения равнодействующей в бетоне N_{bj21} по высоте сечения), σ_{sj21} , Δl_{sj21} , $\sigma_{bj21,red}$, Δl_{bj21} , f_{j21} для последующего определения эквивалентных характеристик σ_{sj21} , ε_{sj21} и σ_{bj21} , ε_{bj21} , χ_{j21} по фор. (17-20), относительной продольной деформации в крайней фибре сжатого бетона $\varepsilon_{bj2(1-2)}$ и секущего модуля деформаций $E_{bj2(1-2)}$ с учетом пластической работы по диаграмме « σ - ε » и фор. (14) и других параметров фор. (24) для определения χ_{j22} на основе *кинематического фактора* k_{j22} (рост пластических деформаций) и формирования матриц: A_{22} , A_{22}^T и B_{22} (замена E_{bj21} на E_{bj22}) для следующего этапа расчета;

Последовательность квазинелинейно-ступенчатого расчета:

1.7. Выполнение этапа II.2.2 нелинейно-ступенчатого расчета на основе результатов вычислений предыдущего этапа II.2.1 с матрицами: A_{22} , A_{22}^T и B_{22} и вектором \vec{P}_2 путем решения системы уравнений (4-6) для определения векторов: \vec{S}_{22} , $\vec{\Delta}_{22}$, \vec{Z}_{22} и их параметров в нормальных сечениях с трещинами: $N_{sj22} = N_{bj22} + N_{j22}$, σ_{sj22} , Δl_{sj22} , $\sigma_{bj22,red}$, Δl_{bj22} , f_{j22} и формирования матриц: A_{23} , A_{23}^T и B_{23} (с учетом замены на $x_{j22,red}$, A_{bj22}) для следующего этапа расчета;

1.8. Повторение этой процедуры для каждой последующей стадии НДС II.3, II.4.1 и далее II.4.2 или наоборот II.4.2 и далее II.4.1, с возможным переходом на стадию IV, при этом с учетом действующих на каждом 2-м этапе стадии II.i НДС равнодействующих усилий в бетоне и арматуре $N_{sji} = N_{bji} + N_{ji}$, изменения модулей деформаций бетона E_{bji} и арматуры $E_{sj,IV}$ (на стадии IV), уменьшения высоты сжатой зоны бетона до x_{ji1} (при увеличении нагрузки) и до x_{ji2} (рост пластических деформаций и ползучесть) на основе *кинематического фактора* k_{ji1} и k_{ji2} , соответственно.

Заключительные положения и комментарии:

2. Вертикальные перемещения смежных узлов, например, 2 и 3 показанных на рис. 1, условных стержней, моделирующих нормальную трещину, равны между собой, т.е. влияние поперечной силы на определение прогибов не учитывается.
3. Изогнутая продольная ось железобетонной балки с нормальными трещинами представляет собой кусочно-гладкую кривую с точками перегиба в местах нормальных сечений с трещинами или условных стержней, исчезающе малых размеров, см. стержни (2), (4) на рис. 1, которая не меняет свое положение по высоте сечения и не является подобием синусоиды, как на рис. 15 в [5], получаемой при использовании гипотезы плоских сечений и предпосылок в разд. 6 гл. 1 [5].

Заключительные положения и комментарии:

4. Для выполнения квазинелинейно-ступенчатого расчета предлагается использовать диаграммы « σ - ε » с нормативными характеристиками материалов по многим причинам.
5. Критерием разрушения нормального сечения с трещиной по I группе ПС на стадии IV НДС для статически определимой балки будут служить:
 - либо достижение напряжениями в растянутой продольной арматуре расчетного сопротивления $\sigma_{s,IV} = R_s$,
 - либо достижение нормальными приведенными напряжениями в сжатой зоне бетона (с прямоугольной эпюрой) по аналогии с фор. (18) расчетного сопротивления $\sigma_{b,IV,red} = R_b$.

Заключительные положения и комментарии:

6. Критериями по ограничениям трещиностойкости и прогибов железобетонной балки по II группе ПС на стадии II.4 НДС будут служить:

- достижение значениями удлинений Δl_{sj} в растянутой продольной арматуре своих предельных значений $a_{crc} = a_{crc,ult}$ в зависимости от продолжительности действия нагрузок;
- достижение значениями прогибов f_{ji} балки своих предельных значений $f_{ji} = f_{ult}$ в зависимости от продолжительности действия нагрузок.

Заключительные положения и комментарии:

7. Применительно к неразрезным железобетонным балкам, в которых возникает «перераспределение» изгибающих моментов [7], критериями разрушения будут являться условия из п. 5 выше, но уже для нормального сечения в пролетной части балки, а в опорных частях учитывается дальнейшее развитие пластических деформаций. Кроме того, как отмечено в статье [1], при определении ширины раскрытия нормальных трещин на опорах базовое расстояние для первой в заделке и второй от заделки нормальных трещин отличается в два раза, т. е. для первой трещины оно должно приниматься равным $l_{sj}/2$, т. о. ширина раскрытия нормальной трещины может вполне удовлетворять требованиям II группы ПС.

Выводы:

1. Предложенный метод по сравнению:
 - с методом **по допускаемым напряжениям** позволит учитывать пластическую работу сжатого бетона и корректно определять высоту сжатой зоны бетона;
 - с методом **предельных усилий** даст возможность определить и учитывать НДС до начала приложения разрушающих нагрузок, что является основой для более корректного учета других аспектов НДС, а именно стадии III (образование и раскрытие наклонных трещин), и критериев разрушения на основе сопротивления бетона срезу в зависимости от уровня нормальных напряжений и высоты сжатой зоны бетона, кроме того, позволит рассматривать варианты армирования не только с размещением продольной арматуры у граней сечения;

Выводы (продолжение п. 1 выше):

- с **диаграммным методом** позволит отказаться от гипотезы плоских сечений или кинематической гипотезы Тимошенко, понятия кривизны для определения относительных деформаций в нормальном сечении балки с трещиной и других последующих допущений и ограничений;
- с **блочным методом предельного равновесия** позволит определять ширину раскрытия трещин и величины прогибов балок, кроме того, учитывать при необходимости знакопеременные нагрузки и историю нагружения, например, для ограждения котлованов из железобетонных конструкций,

и на основе объединения преимуществ каждого из них и предложенной механики железобетонной балки с нормальными трещинами позволит получить более адекватную картину НДС стержневых ЖБК зданий и сооружений для оценки соответствия одновременно требованиям I и II групп ПС со своими частными коэффициентами надежности.

Выводы (окончание):

2. Предложенная механика и метод квазинелинейно-ступенчатого расчета открывает возможность широкого использования физически и геометрически нелинейных подходов в решении задач изгиба стержневых железобетонных конструкций, необходимых для **массового применения при проектировании зданий и сооружений** после:

- проверки на экспериментальных данных;
- уточнения неудачных формулировок, дополнения отдельных положений, расчетных предпосылок и параметров предложенной механики изгиба балки и метода расчета;
- дальнейшего развития с учетом возможности возникновения знакопеременных внутренних усилий и рассмотрения оставшихся необходимых вариантов НДС железобетонных стержневых конструкций;
- внедрения в современные программные комплексы.

Литература:

1. Пекин Д.А. Совершенствование методики расчета базового расстояния между нормальными трещинами в изгибаемых железобетонных элементах // Промышленное и гражданское строительство. – 2022. – №12. С.10-15.
2. Пекин Д.А. Нелинейные расчеты и «перераспределение» усилий в защемленной железобетонной балке при плоском изгибе // Промышленное и гражданское строительство. – 2024. – №8. С.41-47.
3. Пекин Д.А. Стадии напряженно-деформированного состояния железобетонных балок с нормальными трещинами при плоском изгибе // Промышленное и гражданское строительство. – 2024. – №9. С.59-67.
4. Пекин Д.А. Механика железобетонных балок с нормальными трещинами при плоском изгибе // Промышленное и гражданское строительство. – 2024. – №10. С.12-23.
5. Мурашев В.И. Трещиноустойчивость, жесткость и прочность железобетона (Основы сопротивления железобетона). М.: Изд. мин. строит. предприятий машиностроения, 1950. – 268 с.
6. Залесов А.С., Климов Ю.А. Прочность железобетонных конструкций при действии поперечных сил. – К.: Будивэльник, 1989. – 104 с.
7. Байков В.Н., Сигалов В.Н. Железобетонные конструкции. Общий курс. 5-е изд., перераб. и доп. – М.: Стройиздат, 1991. – 767 с.
8. Дарков А.В., Шапошников Н.Н. Строительная механика: Учеб. для строит. спец. вузов – 8-е изд., перераб. и доп. – М.: Высшая школа, 1986. – 607 с.