

УДК 69.04

doi: 10.33622/0869-7019.2024.09.59-67

# Стадии напряженно-деформированного состояния железобетонных балок с нормальными трещинами при плоском изгибе\*

Дмитрий Анатольевич ПЕКИН, кандидат технических наук, главный конструктор, dpekin@mail.ru

ИНВ-Строй, 142105 Московская обл., г. Подольск, ул. Пионерская, 6-30

**Аннотация.** Выполнен краткий обзор и сравнение классических и современных методов расчета сечений с нормальными трещинами, используемых на различных стадиях напряженно-деформированного состояния. Скорректирован перечень стадий напряженно-деформированного состояния с учетом дополнительной стадии (образование и раскрытие наклонных трещин), на основе которой уточняется содержание последней стадии разрушения изгибаемых железобетонных элементов. Детально рассмотрена вторая стадия напряженно-деформированного состояния железобетонных балок при изгибе – образование и раскрытие нормальных трещин, с учетом развития пластических деформаций и ползучести в сжатом бетоне для создания предпосылок по развитию механики железобетонных балок с нормальными трещинами. В следующей статье будет предложен универсальный метод расчета, способный исключить имеющиеся недостатки и объединить преимущества всех известных методов расчета – по допускаемым напряжениям и предельным усилиям, диаграммного метода и метода предельного равновесия.

**Ключевые слова:** железобетонная балка, напряженно-деформированное состояние, сжатая зона бетона, прогибы балки, внутренние деформации в сжатом бетоне

**Для цитирования:** Пекин Д. А. Стадии напряженно-деформированного состояния железобетонных балок с нормальными трещинами при плоском изгибе // Промышленное и гражданское строительство. 2024. № 9. С. 59 – 67. doi: 10.33622/0869-7019.2024.09.59-67

## STAGES OF STRESS-STRAIN STATE OF REINFORCED CONCRETE BEAMS WITH NORMAL CRACKS UNDER PLANE BENDING

Dmitrii A. PEKIN, dpekin@mail.ru

INV-Stroy, Pionerskaya ul., 6-30, Podolsk 142105, Russian Federation

**Abstract.** A brief review and comparison of classical and modern methods for calculating sections with normal cracks used at various stages of the stress-strain state is carried out. The list of stages of the stress-strain state is adjusted taking into account the additional stage – the formation and opening of diagonal cracks, on the basis of which the content of the failure stage of bending reinforced concrete elements is specified. The second stage of the stress-strain state of reinforced concrete beams during bending (the formation and opening of normal cracks) is considered in detail, taking into account the development of plastic deformations and creep in compressed concrete to create the prerequisites for the development of new mechanics of reinforced concrete beams with normal cracks. The following article will propose a universal calculation method that can eliminate existing shortcomings and combine the advantages of all known calculation methods – by allowable stresses and ultimate forces, the diagram method and the limit equilibrium method.

**Keywords:** reinforced concrete beam, stress-strain state, compressed concrete zone, deflections of the beam, internal deformations in compressed concrete

**For citation:** Pekin D. A. Stages of Stress-Strain State of Reinforced Concrete Beams With Normal Cracks Under Plane Bending. *Proyshlennoe i grazhdanskoe stroitel'stvo* [Industrial and Civil Engineering], 2024, no. 9, pp. 59 – 67. (In Russ.). doi: 10.33622/0869-7019.2024.09.59-67

### Введение

Стадии напряженно-деформированного состояния (НДС) изгибаемых железобетонных элементов играют важную роль в понимании фактической работы конструкции и выборе методик расчета для проверки соответствия требованиям предельных

состояний. Новый метод расчета нормальных сечений железобетонных балок на основе нелинейной деформационной модели (НДМ), предлагаемый различными авторами [1–9] и анализируемый в статье [10], не использует традиционные стадии НДС в связи с отсутствием такой необходимости и стремлением к универсальности. Далее при подробном рассмотрении второй стадии НДС будет

\* Начало см. «ПГС». 2024. № 8. С. 41–47.

показано, что такой подход обладает очевидными недостатками.

Цель работы — показать, что стадии НДС, совместно с критерием определения расстояния между нормальными трещинами для разделения стержневых элементов по длине на блоки, являются основой для совершенствования и разработки новых методов расчета железобетонных балок с нормальными трещинами, что позволит определять фактическое НДС конструкций при массовом проектировании.

### Модели и методы

Для начала вспомним методы расчета нормальных сечений железобетонных балок, зародившиеся в конце XIX и начале XX вв., а также стадии НДС. На *рис. 1а* и в формулах (1–6) иллюстрируется метод расчета по допускаемым напряжениям, основанный на совместных ограничениях напряжений, действующих в сжатом бетоне  $\sigma_{bc}$  и арматуре  $\sigma_{sc}$ , в растянутой арматуре  $\sigma_s$  относительно соответствующих пределов сопротивления материалов:

$$[\sigma_{bc}; \sigma_{sc}; \sigma_s] \leq \frac{[R_b; R_{sc}; R_s]}{\gamma}, \quad (1)$$

$$A_{red} = A_{bc} + \alpha A'_s + \alpha A_s, \quad (2)$$

где  $\sigma_{bc}$ ,  $\sigma_{sc}$ ,  $\sigma_s$  ( $A_{bc}$ ,  $A'_s$ ,  $A_s$ ) — напряжения (площади) в сжатом бетоне и арматуре, а также в растянутой арматуре соответственно;  $A_{red}$  — приведенная площадь бетона;  $\alpha = E_s/E_b$  — коэффициент приведения стали к бетону;  $E_s$  и  $E_b$  — модуль упругости стали и начальный модуль упругости бетона соответственно;  $R_b$ ,  $R_{sc}$  и  $R_s$  — пределы сопротивления бетона, сжатой и растянутой арматуры соответственно;  $\gamma > 1$  — обобщенный коэффициент запаса.

Высота сжатой зоны бетона в этом методе определяется на основе равенства нулю статического момента всего сечения:

$$\alpha A'_s(x - a') + \frac{A_{bc}x}{2} = \alpha A_s(h_0 - x) \quad (3)$$

и решения квадратного уравнения относительно  $x$ :

$$bx^2 + 2\alpha(A'_s + A_s)x - 2\alpha(A'_sa' + A_sh_0) = 0; \quad (4)$$

$$x = \frac{\sqrt{\alpha^2(A'_s + A_s)^2 + 2\alpha b(A'_sa' + A_sh_0)} - \alpha(A'_s + A_s)}{b}; \quad (5)$$

$$x = h_0 \left[ \sqrt{\alpha^2(\mu'_s + \mu_s)^2 + 2\alpha \left( \frac{\mu'_s \alpha'}{h_0} + \mu_s \right)} - \alpha(\mu'_s + \mu_s) \right]; \quad (6)$$

где  $x$  — высота сжатой зоны бетона;  $b$  — ширина балки;  $a$  — расстояние от растянутой грани балки до центра тяжести растянутой арматуры;  $a'$  — расстояние от сжатой грани балки до центра тяжести сжатой арматуры;  $h_0 = h - a$  — рабочая высота сечения;  $\mu_s = A_s/(bh_0)$  и  $\mu'_s = A'_s/bh_0$  — процент армирования.

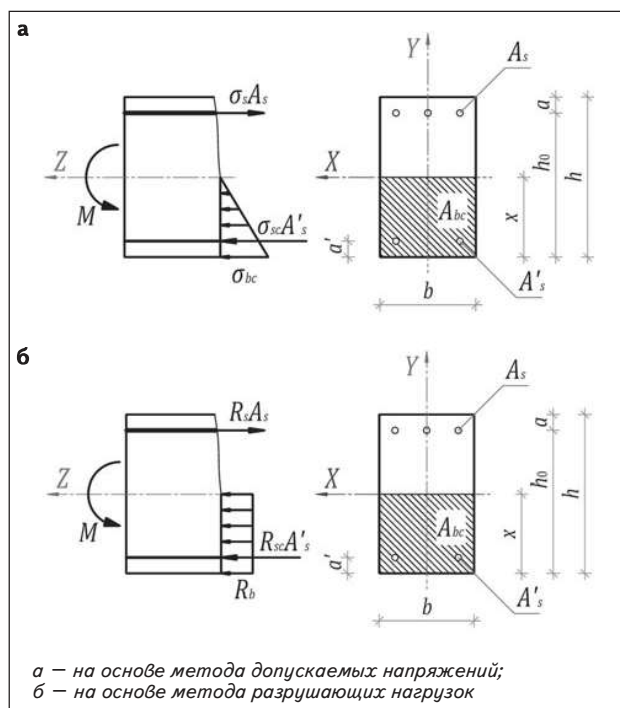


Рис. 1. Эпюры внутренних напряжений и усилий в нормальном сечении с трещиной консольной балки

В настоящий момент метод расчета по допускаемым напряжениям с некоторой адаптацией используется при расчете железобетонных элементов по трещиностойкости согласно требованиям второй группы предельных состояний в СП 63.13330.2018 «СНиП 52-01-2003 Бетонные и железобетонные конструкции. Основные положения».

Метод расчета по разрушающим нагрузкам, предложенный проф. А. Ф. Лолейтом в начале XX в., стал развитием метода по допускаемым напряжениям и позволил существенно сократить расход арматурной стали в железобетонных балках. На *рис. 1б* и в формулах (7–10) иллюстрируется метод расчета по разрушающим нагрузкам с учетом предложения проф. П. Л. Пастернака о замене треугольной эпюры напряжений сжатой зоны бетона на прямоугольную (возможно, в целях упрощения арифметических вычислений или несколько другого понимания работы поперечного сечения с нормальной трещиной), который заключается в определении для балки допускаемой нагрузки  $F$  на основе равновесия внешних и внутренних усилий в нормальном сечении на стадии разрушения:

$$[F] = [F_{ult}]/k, \quad (7)$$

где  $F$  — допускаемая нагрузка на балку;  $F_{ult}$  — разрушающая нагрузка на основе равновесия внутренних усилий при  $\sigma_{bc} = R_b$ ,  $\sigma_{sc} = R_{sc}$ ,  $\sigma_s = R_s$ ;  $k > 1$  — обобщенный коэффициент запаса.

Высота сжатой зоны бетона в нормальном сечении согласно этому методу определяется на основе равновесия внутренних продольных усилий:

$$R_s A_s = R_{sc} A'_s + R_b A_{bc} = R_{sc} A'_s + R_b b x, \quad (8)$$

$$x = \frac{R_s A_s - R_{sc} A'_s}{R_b b} \quad (9)$$

и позволяет вычислить предельный изгибающий момент сечения:

$$M_{ult} = R_{sc} A'_s (x - a') + \frac{R_b b x^2}{2} + R_s A_s (h_0 - x), \quad (10)$$

который сравнивается с максимальным изгибающим моментом в балке, полученным на основе линейного упругого расчета.

Важно отметить, в связи с чем метод расчета по разрушающим нагрузкам позволил существенно снизить расход арматуры. При сравнении по формуле (1) нормальных напряжений  $\sigma_{bc}$  в сжатой зоне бетона с призменной прочностью бетона  $R_b$  от действия нагрузки  $F$  из формулы (7) неравенство (1) не выполняется, поскольку при определении высоты сжатой зоны бетона  $x$  по формуле (5) используется начальный модуль упругости бетона  $E_b$ , не учитывающий развития пластических деформаций и не соответствующий стадии НДС. Поэтому значения  $x$  получались сопоставимыми или даже меньшими, чем по формуле (9) метода расчета по разрушающим нагрузкам. При этом напряжения в растянутой арматуре  $\sigma_s$  для заданной нагрузки  $F$  из выражения (7) получаются меньше  $R_s$  и неравенство (1) в этой части удовлетворяется. Если в (5) вместо  $\alpha$  подставить скорректированный коэффициент приведения арматуры к бетону  $\alpha_s$ , использующий вместо начального модуля упругости бетона  $E_b$  модуль деформации бетона  $E_{b,red}$ , который существенно меньше начального, то получим существенно большую высоту сжатой зоны бетона  $x$  по формуле (5) и напряжения  $\sigma_{bc}$  в сжатой зоне бетона меньше, чем призменная прочность бетона  $R_b$ . Результаты расчетов этими методами очень схожи, если использовать скорректированный коэффициент приведения арматуры к бетону  $\alpha_s$ , который заметно больше начального коэффициента  $\alpha$ .

Метод расчета по разрушающим нагрузкам обладает другим недостатком — невозможно определить высоту сжатой зоны на этапе нормальной эксплуатации, когда значения нагрузок далеки от расчетных. Кроме того, при использовании симметричного армирования нижней и верхней зоны балки высота сжатой зоны бетона получается равной нулю для арматуры класса А400 и ниже по формуле (9), поэтому при отсутствии необходимости установки продольной арматуры в сжатой зоне бетона ( $\xi \leq \xi_R$ ) ее не учитывают в расчете.

Эти методы расчета нормальных сечений усовершенствованы на основе метода расчета строительных конструкций по предельным состояниям, предложенного проф. Н. С. Стрелецким, развиты для железобетона проф. А. А. Гвоздевым и используются в СП 63.13330 с некоторыми ограничениями в отличие от метода расчета на основе НДМ, который использует деформационные критерии для определения соответствия требованиям первой группы предельных состояний и ограничивает относительные деформации сжатого бетона  $\varepsilon_b$  и растянутой арматуры  $\varepsilon_s$ .

Следует отметить, что метод на основе НДМ использует при расчете нормальных сечений результаты линейного упругого расчета балок и показывает схожие результаты по критерию предельного изгибающего момента для первой группы предельных состояний. При таком подходе он не позволяет определить фактическую картину деформированного состояния конструкций и, очевидно, учесть так называемое перераспределение внутренних усилий в статически неопределимых системах [10], в связи с чем пролетные значения изгибающих моментов в балках получаются заниженными, а надпорные — завышенными. Задание в расчетных моделях зданий и сооружений пониженных значений модуля упругости бетона на основе рекомендаций СП 52-103-2007 «Железобетонные монолитные конструкции зданий» или СП 430.1325800.2018 «Монолитные конструктивные системы. Правила проектирования» также не позволяет получить реальную картину НДС, поскольку в пределах (т. е. когда будут заданы фактические характеристики изгибной жесткости для всех сотен или десятков тысяч элементов) в лучшем случае будет соответствовать результатам на основе физически нелинейного расчета, с которыми сложно согласиться на основе аргументов, изложенных в статье [10].

Перечислим стадии НДС по длине железобетонных балок без традиционной привязки к состоянию чистого изгиба [11, 12], возникающему в зоне между двумя одинаковыми внешними поперечными силами, приложенными на одинаковом расстоянии от опор:

- стадия I — без трещин;
- стадия II — образование и раскрытие нормальных трещин;
- стадия III — образование и раскрытие наклонных трещин;
- стадия IV — разрушение по нормальному или наклонному сечению в зависимости от принятого армирования, с учетом предложений проф. А. С. Залесова [13] по добавлению новой стадии III и дополнительных вариантов разрушения по наклонному

сечению в последней стадии IV, которую ранее было принято обозначать как стадия III.

Для совершенствования рассмотренных методов расчета нормальных сечений и механики железобетонных балок необходимо отметить важность первой стадии НДС и критерия для определения расстояний между нормальными трещинами на основе деформационного подхода, рассмотренного в статье [14] и позволяющего более корректно вычислить положение нормальных трещин по длине балки по сравнению с отечественными или зарубежными нормами.

### Результаты исследования и их анализ

Далее подробно остановимся на стадии II НДС, поскольку большинство монолитных железобетонных балок без предварительно напряженной арматуры или в определенных случаях при ее наличии находится в таком НДС на этапе эксплуатации, и именно она является исходной для учета последующих кратковременных или особых нагрузок и воздействий, а также расчета наклонных сечений на действие изгибающих моментов.

1. *Стадия II.0* — образование нормальных трещин. Напряжения в продольной растянутой арматуре до образования нормальных трещин  $\sigma_{s01}$  в десятки раз меньше расчетного сопротивления  $R_s$ , поскольку момент образования нормальных трещин  $M_{crc}$  обычно кратно меньше предельного изгибающего момента  $M_{ult}$ , воспринимаемого сечением на стадии IV. Но в практике иногда встречаются такие случаи проектных ошибок, когда после приложения сравнительно небольшой неучтенной при проектировании поперечной нагрузки и образования нормальных трещин в балке или фундаментной плите, работающей в одном направлении, при очень низком проценте армирования  $\mu_s$  и достаточно большой высоте поперечного сечения и длине пролета элемента сразу наступает предельное состояние, соответствующее стадии IV, с напряжениями в растянутой арматуре  $\sigma_{s02} = R_s$ .

Высота сжатой зоны бетона до образования нормальной трещины равна расстоянию от центра тяжести поперечного сечения до наиболее сжатой фибры бетона  $x_{01} = y_c \cong h/2$ , а эпюра нормальных сжимающих напряжений бетона — треугольная. Очевидно, что после образования нормальной трещины в этом сечении происходит скачок и резкое увеличение нормальных напряжений как в крайней сжатой фибре бетона  $\sigma_{b02}$ , так и в растянутой арматуре  $\sigma_{s02}$ . В сжатой зоне бетона скачок нормальных напряжений можно обосновать следующими неравенствами:

$$I_{red,el} > I_{red,crc}; \quad (11)$$

$$\sigma_{b01} = \frac{M_{crc} y_c}{I_{red,el}} < \sigma_{b02} = \frac{M_{crc} y_c}{I_{red,crc}}, \quad (12)$$

где  $I_{red,el}$  и  $I_{red,crc}$  — момент инерции поперечного сечения до и после образования нормальной трещины соответственно.

Кроме того, коэффициенты приведения стали к бетону для сжатой ( $\alpha_{s1} = \alpha_{sc}$ ) и растянутой ( $\alpha_{s2} = \alpha_{st}$ ) арматуры после образования нормальных трещин не могут приниматься для балок равными друг другу  $\alpha_{sc} = \alpha_{st}$ , как это допускается согласно п. 8.2.16 и 8.2.30 СП 63.13330. Доказательство этого утверждения выполним от противного. Допустим:  $\alpha_{sc} = \alpha_{st} = \alpha_s$ , глубина нормальной трещины  $y_{crc} \cong h/2$  и высота сжатой зоны бетона  $x_{02} \cong h/2$ , тогда, преобразуя формулу (4):

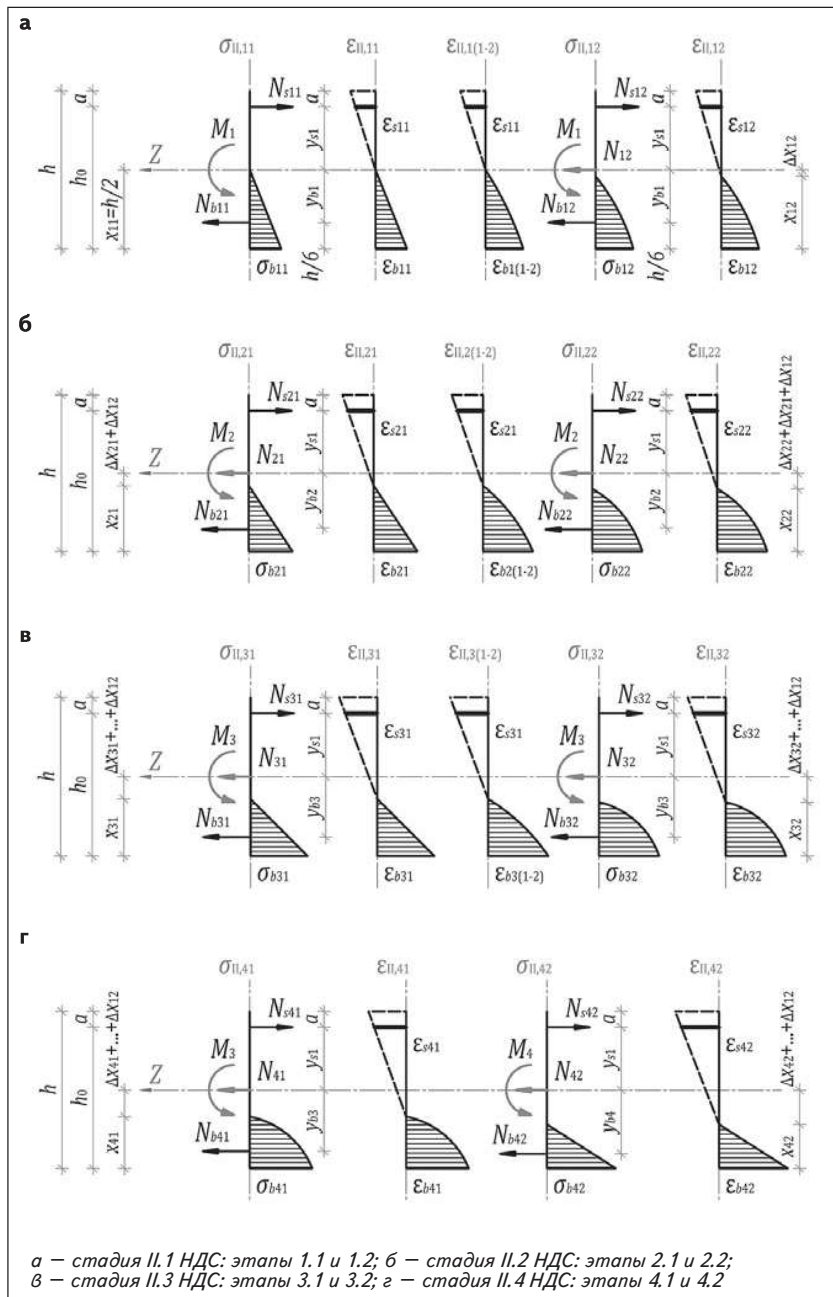
$$\alpha_s = \frac{bx_{02}^2}{2(A_s' a' + A_s h_0) - 2x_{02}(A_s' + A_s)} = \quad (13)$$

$$= \frac{bh^2}{4(2A_s' a' + 2A_s h_0 - A_s' h - A_s h)},$$

на примере консольной балки, рассмотренной в статье [14], получим  $\alpha_s = 51,3$  и  $E_{b,red} = E_s/\alpha_s = 3899$  МПа, что не может соответствовать действительности, поскольку начальный модуль упругости бетона класса В25 равен  $E_{b0} = 30\,000$  МПа, а секущий модуль деформаций бетона согласно п. 6.1.21 при непродолжительном действии нагрузки составляет  $E_{b,red} = R_b/\varepsilon_{b1,red} = 14,5/0,0015 = 9667$  МПа. Таким образом, использование коэффициента приведения стали к бетону  $\alpha_s$  в сечении с нормальной трещиной затруднительно не только для сжатой арматуры в связи с фактически переменным модулем деформации сжатого бетона  $E_{b,red}$ , но тем более для растянутой арматуры.

На основе следующего наблюдения за результатами экспериментов, описанного в работе проф. В. И. Мурашева [11, раздел 4а], о сравнительно быстром достижении нормальными трещинами некоторого предельного значения и малом удлинении до начала разрушения, можно принять следующее консервативное допущение — глубина нормальной трещины  $y_{crc}$  в момент трещинообразования  $M_{crc}$  равна высоте растянутой зоны бетона на предыдущей стадии  $y_i$  или с достаточной точностью  $h/2$ , т. е. переход на следующую стадию II.1 происходит практически мгновенно, а стадия II.0 носит несколько условный характер.

2. *Стадия II.1 (рис. 2а)* — увеличение глубины нормальной трещины  $y_{crc}$  до центра тяжести поперечного сечения балки с учетом армирования или с достаточной точностью до половины высоты балки без его учета  $y_i \cong h/2$  происходит при упругой работе сжатого бетона или с незначительными пластическими деформациями при действии на край-



**Рис. 2.** Эпюры внутренних напряжений и деформаций, равнодействующих усилий в нормальном сечении с трещиной консольной балки на стадии II НДС

ней фибре сжатого бетона нормальных напряжений  $\sigma_{b11}$ . Этот этап является достаточно важным, поскольку последующее увеличение глубины нормальной трещины и развитие пластических деформаций в сжатом бетоне позволяют зафиксировать отказ от возможности дальнейшего использования гипотезы плоских сечений и понятия кривизны для определения относительных деформаций в нормальном сечении балки с трещиной. Этому этапу

может соответствовать как часть нагрузки от собственного веса балки, так и сумма постоянных и длительных временных нагрузок в других поперечных сечениях по длине балки.

После этого на данном этапе, без роста внешней вертикальной нагрузки, при сохранении равновесия внутренних усилий в сечении и за счет пластической работы сжатого бетона, необходимо учесть развитие продольных относительных деформаций в крайней фибре сжатого бетона с упругих  $\varepsilon_{b11}$  до упругопластических  $\varepsilon_{b1(1-2)} \leq \varepsilon_{b12}$ ; дальнейшее возможное увеличение глубины нормальной трещины и соответствующие этому уменьшение высоты сжатой зоны бетона с  $x_{11} = h/2$  до  $x_{12}$  на величину  $\Delta x_{12}$  и увеличение нормальных напряжений на крайней фибре сжатого бетона с  $\sigma_{b11}$  до  $\sigma_{b12}$  посредством диаграммы « $\sigma$ – $\varepsilon$ » и кинематического фактора  $k_{12}$ , который будет определен в следующей статье. При этом прогибы увеличиваются с  $f_{11}$  до  $f_{12}$ , но равновесие в сечении между внешней нагрузкой и внутренними усилиями сохраняется, т. е. изгибающий момент от внешней нагрузки равен сумме произведений равнодействующих в сжатом бетоне и растянутой арматуре на расстояния до продольной оси:  $M_1 = y_{b1}N_{b12} + y_{s1}N_{s12}$ ,  $N_{s12} = N_{b12} + N_{12}$ . Кроме того, относительные деформации в растянутой арматуре  $\varepsilon_{s11} \cong \varepsilon_{s12}$  и напряжения  $\sigma_{s11} \cong \sigma_{s12}$  изменяются незначительно.

Следует отметить, что в определенных случаях (при больших прогибах уже на этом этапе) с учетом деформированного состояния балки на данной стадии НДС в сечении может возникнуть некоторая продольная растягивающая сила  $N_{12}$ , которая увеличивает напряжения в растянутой арматуре  $\sigma_{s12}$  и уменьшает напряжения в сжатой зоне бетона  $\sigma_{b12}$ .

Нормальные напряжения  $\sigma_{b12} \geq \sigma_{b11}$  определяются на основе равнодействующей в сжатом бетоне  $N_{b12} = N_{b11} - N_{12}y_{s1}/y_1$  с учетом возмож-

ного уменьшения высоты сжатой зоны бетона с  $x_{11} = h/2$  до  $x_{12}$  на величину  $\Delta x_{12}$  и появления растягивающей силы  $N_{12}$ . Равнодействующая определяется на основе внутренних усилий, показанных на рис. 2а, и следующих выражений:

$$M_1 = y_1 N_{s12} - y_{b1} N_{12} = y_1 N_{b11}, \quad (14)$$

$$N_{s12} = N_{b12} + N_{12}, \quad (15)$$

$$y_1 = y_{b1} + y_{s1} \quad (16)$$

и преобразований путем подстановки (15) и (16) в среднюю часть (14), сокращения в средней части слагаемого  $y_{b1} N_{12}$  и деления всех частей на  $y_1$ :

$$M_1/y_1 = N_{b12} + N_{12} y_{s1}/y_1 = N_{b11}, \quad (17)$$

где  $y_1$  – плечо внутренней пары сил.

**3. Стадия II.2 (рис. 2б)** – рост внешней вертикальной нагрузки за счет оставшейся части собственного веса и других постоянных нагрузок, вызывающий дальнейшее увеличение равнодействующих внутренних усилий с  $N_{s12} = N_{b12} + N_{12}$  до  $N_{s21} = N_{b21} + N_{21}$ , нормальных напряжений на крайней фибре сжатого бетона с  $\sigma_{b12}$  до  $\sigma_{b21}$ , относительных деформаций в сжатом бетоне с  $\varepsilon_{b12}$  до  $\varepsilon_{b21}$ , в растянутой арматуре с  $\varepsilon_{s12}$  до  $\varepsilon_{s21}$  и прогибов с  $f_{12}$  до  $f_{21}$ , уменьшение высоты сжатой зоны бетона с  $x_{12}$  до  $x_{21}$  на величину  $\Delta x_{21}$  за счет кинематического фактора  $k_{21}$ .

Далее, как на этапе 1.2 стадии II.1, без роста внешней нагрузки, при сохранении равновесия внешних и внутренних усилий в нормальном сечении и за счет пластической работы сжатого бетона необходимо учесть развитие продольных относительных деформаций в крайней фибре сжатого бетона с  $\varepsilon_{b21}$  до  $\varepsilon_{b2(1-2)} \leq \varepsilon_{b22}$ , дальнейшее возможное увеличение глубины нормальной трещины, уменьшение высоты сжатой зоны бетона с  $x_{21}$  до  $x_{22}$  на величину  $\Delta x_{22}$  и увеличение нормальных напряжений на крайней фибре сжатого бетона с  $\sigma_{b21}$  до  $\sigma_{b22}$  посредством диаграммы « $\sigma$ – $\varepsilon$ » и скорректированного кинематического фактора  $k_{22}$ . При этом прогибы увеличиваются с  $f_{21}$  до  $f_{22}$ , но равновесие в нормальном сечении между внешней нагрузкой и внутренними усилиями снова сохраняется, т. е. изгибающий момент от внешней нагрузки равен сумме произведений равнодействующих в сжатом бетоне и растянутой арматуре на расстояния до продольной оси:  $M_2 = y_{b2} N_{b22} + y_{s1} N_{s22}$ ,  $N_{s22} = N_{b22} + N_{22}$ . Кроме того, относительные деформации в растянутой арматуре  $\varepsilon_{s21} \cong \varepsilon_{s22}$  и напряжения  $\sigma_{s21} \cong \sigma_{s22}$  изменяются незначительно.

Нормальные напряжения  $\sigma_{b22} \geq \sigma_{b21}$  определяются на основе равнодействующей в сжатом бетоне по аналогии с формулами (14–17) и с учетом дальнейшего уменьшения высоты сжатой зоны бе-

тона с  $x_{21}$  до  $x_{22}$  на величину  $\Delta x_{22}$  и увеличения растягивающей силы до  $N_{22}$ .

**4. Стадия II.3 (рис. 2в)** – дальнейший рост внешней вертикальной нагрузки за счет других временных длительных нагрузок, вызывающий дальнейшее увеличение равнодействующих внутренних усилий с  $N_{s22} = N_{b22} + N_{22}$  до  $N_{s31} = N_{b31} + N_{31}$ , нормальных напряжений на крайней фибре сжатого бетона с  $\sigma_{b22}$  до  $\sigma_{b31}$ , относительных деформаций в сжатом бетоне с  $\varepsilon_{b22}$  до  $\varepsilon_{b31}$ , растянутой арматуре с  $\varepsilon_{s22}$  до  $\varepsilon_{s31}$  и прогибов с  $f_{22}$  до  $f_{31}$ , уменьшение высоты сжатой зоны бетона с  $x_{22}$  до  $x_{31}$  на величину  $\Delta x_{31}$  за счет кинематического фактора  $k_{31}$ .

Снова, как на этапе 2.2 стадии II.2, без роста внешней нагрузки, при сохранении равновесия внешних и внутренних усилий в нормальном сечении и за счет пластической работы сжатого бетона необходимо учесть развитие продольных относительных деформаций в крайней фибре сжатого бетона с  $\varepsilon_{b31}$  до  $\varepsilon_{b3(1-2)} \leq \varepsilon_{b32}$ , дальнейшее возможное увеличение глубины нормальной трещины, соответствующие этому уменьшение высоты сжатой зоны бетона с  $x_{31}$  до  $x_{32}$  на величину  $\Delta x_{32}$  и увеличение нормальных напряжений на крайней фибре сжатого бетона с  $\sigma_{b31}$  до  $\sigma_{b32}$  посредством диаграммы « $\sigma$ – $\varepsilon$ » и скорректированного кинематического фактора  $k_{32}$ . При этом прогибы увеличиваются с  $f_{31}$  до  $f_{32}$ , но равновесие в нормальном сечении между внешней нагрузкой и внутренними усилиями снова сохраняется, т. е. изгибающий момент от внешней нагрузки равен сумме произведений равнодействующих в сжатом бетоне и растянутой арматуре на расстояния до продольной оси:  $M_3 = y_{b3} N_{b32} + y_{s1} N_{s32}$ ,  $N_{s32} = N_{b32} + N_{32}$ . Кроме того, относительные деформации в растянутой арматуре  $\varepsilon_{s31} \cong \varepsilon_{s32}$  и напряжения  $\sigma_{s31} \cong \sigma_{s32}$  снова изменяются незначительно.

Нормальные напряжения  $\sigma_{b32} \geq \sigma_{b31}$  определяются на основе равнодействующей в сжатом бетоне по аналогии с (14–17) и с учетом возможного уменьшения высоты сжатой зоны бетона с  $x_{31}$  до  $x_{32}$  на величину  $\Delta x_{32}$  и увеличения растягивающей силы до  $N_{32}$ .

**5. Стадия II.4.1 (рис. 2г)** – если ползучесть в сжатом бетоне развивается до приложения следующих временных или особых нагрузок (нельзя исключать возможность обратного – воздействия следующих нагрузок до возникновения ползучести), то, как и на предыдущем этапе, при сохранении равновесия внешних и внутренних усилий в нормальном сечении и за счет ползучести в сжатом бетоне необходимо учесть развитие продольных относительных деформаций в сжатом бетоне с  $\varepsilon_{b32}$  до  $\varepsilon_{b41}$  на основе диаграммы ползучести бетона,

зависящей от возраста и уровня напряжений, дальнейшее возможное увеличение глубины нормальной трещины, соответствующие этому уменьшение высоты сжатой зоны бетона с  $x_{32}$  до  $x_{41}$  на величину  $\Delta x_{41}$  и увеличение нормальных напряжений на крайней фибре сжатого бетона с  $\sigma_{b32}$  до  $\sigma_{b41}$  посредством в очередной раз скорректированного кинематического фактора  $k_{41}$ . При этом прогибы увеличиваются с  $f_{32}$  до  $f_{41}$ , но равновесие в нормальном сечении между внешней нагрузкой и внутренними усилиями снова сохраняется, т. е. изгибающий момент от внешней нагрузки равен сумме произведений равнодействующих в сжатом бетоне и растянутой арматуре на расстояния до продольной оси:  $M_3 = y_{b3}N_{b41} + y_{s1}N_{s41}$ ,  $N_{s41} = N_{b41} + N_{41}$ . Кроме того, относительные деформации в растянутой арматуре  $\varepsilon_{s32} \cong \varepsilon_{s41}$  и напряжения  $\sigma_{s32} \cong \sigma_{s41}$  изменяются незначительно.

**6. Стадия II.4.2** — дальнейший рост внешней вертикальной нагрузки за счет разницы между кратковременной и длительной частями временной полезной нагрузки, других кратковременных или особых нагрузок с учетом коэффициентов сочетаний, вызывающий дальнейшее увеличение равнодействующих внутренних усилий с  $N_{s32} = N_{b32} + N_{32}$  до  $N_{s41} = N_{b41} + N_{41}$  или с  $N_{s41} = N_{b41} + N_{41}$  до  $N_{s42} = N_{b42} + N_{42}$ , нормальных напряжений на крайней фибре сжатого бетона с  $\sigma_{b32}$  до  $\sigma_{b41}$  или с  $\sigma_{b41}$  до  $\sigma_{b42}$ , относительных деформаций в сжатом бетоне с  $\varepsilon_{b32}$  до  $\varepsilon_{b41}$  или с  $\varepsilon_{b41}$  до  $\varepsilon_{b42}$ , растянутой арматуре с  $\varepsilon_{s32}$  до  $\varepsilon_{s41}$  или с  $\varepsilon_{s41}$  до  $\varepsilon_{s42}$  и прогибов с  $f_{32}$  до  $f_{41}$  или с  $f_{41}$  до  $f_{42}$ , уменьшение высоты сжатой зоны бетона с  $x_{32}$  до  $x_{41}$  или с  $x_{41}$  до  $x_{42}$  в зависимости от того, что возникнет раньше — ползучесть или приложение указанных временных или особых нагрузок.

На этом этапе рассматриваются различные сочетания временных или особых нагрузок уже по отдельности, сгруппированные по одинаковым признакам: например, другие кратковременные нагрузки, действующие непосредственно на балку, отдельно знакопеременные временные воздействия или особые воздействия, действующие на здание или сооружение. И для каждого такого сочетания уже не требуется определять возникающие и рассматриваемые ранее эффекты за счет пластических деформаций или деформаций ползучести в сжатом бетоне.

На *рис. 2* иллюстрируются внутренние усилия, продольные нормальные напряжения и относительные деформации, соответствующие описанным выше этапам нагружения и развития пластических деформаций и ползучести на второй стадии НДС для консольной балки, рассмотренной в статье [14], но без сжатой арматуры, на примере попереч-

ного сечения с наибольшим значением изгибающего момента — в заделке.

На *рис. 2а–в* показаны эпюры полных продольных относительных деформаций  $\varepsilon_{II,1(1-2)}$ ,  $\varepsilon_{II,2(1-2)}$  и  $\varepsilon_{II,3(1-2)}$  в нормальном сечении с трещиной, соответствующие значениям полных продольных относительных деформаций на крайней фибре сжатого бетона  $\varepsilon_{b1(1-2)}$ ,  $\varepsilon_{b2(1-2)}$  и  $\varepsilon_{b3(1-2)}$  при действии нормальных напряжений  $\sigma_{b11}$ ,  $\sigma_{b21}$  и  $\sigma_{b31}$  без потенциального уменьшения высоты сжатой зоны бетона  $x_{11}$ ,  $x_{21}$  и  $x_{31}$  на каждом втором этапе стадии II НДС, т. е. соответствующие горизонтальным участкам роста пластических деформаций в сжатом бетоне на диаграмме « $\sigma$ – $\varepsilon$ » (без увеличения нормальных сжимающих напряжений) и формально необходимые для определения кинематического фактора  $k_{12}$ ,  $k_{22}$  и  $k_{32}$  (будет рассмотрено в следующей статье). Использование на каждом втором этапе стадии II НДС продольной относительной деформации на крайней фибре сжатого бетона  $\varepsilon_{bi(1-2)}$  весьма условно и необходимо также для определения потенциально выросших значений нормальных сжимающих напряжений на крайней фибре сжатого бетона  $\sigma_{bi2}$  (в связи с возможным уменьшением высоты сжатой зоны бетона в процессе развития пластических деформаций) и соответствующих им значений продольной относительной деформации  $\varepsilon_{bi2}$ .

Следует отметить, что в отдельных редких случаях, связанных со специфическими воздействиями и попытками чрезмерно сократить расход материалов, напряжения и относительные деформации в растянутой арматуре на различных этапах стадии II НДС могут значительно увеличиваться  $\sigma_{si2} \geq \sigma_{si1}$  и  $\varepsilon_{si2} \geq \varepsilon_{si1}$ , что требует дополнительной проверки на основе диаграммы « $\sigma$ – $\varepsilon$ » для арматурной стали и при необходимости корректировки армирования или высоты сечения. Кроме того, для большинства статически определимых железобетонных балок, запроектированных с учетом всех дополнительных конструктивных требований и ограничений СП 63.13330 без перерасхода арматуры и при обеспечении прочности наклонных сечений, достижение напряжений в арматуре расчетного сопротивления  $\sigma_s = R_s$  является определяющим фактором, свидетельствующем о переходе на стадию IV НДС и начале разрушения балки по нормальным сечениям или образовании пластического шарнира, такую стадию НДС проф. В. И. Мурашев предложил называть IIa [11, раздел 1].

## Выводы

1. Каждый из известных методов расчета нормальных сечений железобетонных балок с трещинами обладает своими достоинствами и недостатками. Разработка универсального метода расчета, способ-

ного исключить имеющиеся недостатки и объединить преимущества всех известных методов расчета (по допускаемым напряжениям и предельным усилиям, диаграммного метода и метода предельного равновесия), является весьма актуальной задачей.

2. Стадии НДС, совместно с критерием определения расстояния между нормальными трещинами,

предложенным в статье [14], для разделения стержневых элементов по длине на блоки, являются основой для совершенствования и разработки нового метода расчета и механики изгиба железобетонных балок с нормальными трещинами, которые совместно позволяют определять фактическое НДС конструкций при массовом проектировании.

#### СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. Карпенко Н. И., Мухамедиев Т. А., Сапожников М. А. К построению методики расчета стержневых элементов на основе диаграмм деформирования материалов // Совершенствование методов расчета статически неопределимых железобетонных конструкций. М. : НИИЖБ, 1987. С. 4–24.
2. Карпенко С. Н. О построении связей междуращениями напряжений и деформаций на основе различных диаграмм // Вестник гражданских инженеров. 2010. № 1. С. 60–63.
3. Карпенко Н. И., Соколов Б. С., Радайкин О. В. К определению деформаций изгибаемых железобетонных элементов с использованием диаграмм деформирования бетона и арматуры // Строительство и реконструкция. 2012. № 2. С. 11–20.
4. Карпенко Н. И., Радайкин О. В. К совершенствованию диаграмм деформирования бетона для определения момента трещинообразования и разрушающего момента в изгибаемых железобетонных элементах // Строительство и реконструкция. 2012. № 3. С. 10–17.
5. Карпенко Н. И., Соколов Б. С., Радайкин О. В. Совершенствование методики расчета изгибаемых железобетонных элементов без предварительного напряжения по образованию нормальных трещин // Строительные материалы. 2013. № 6. С. 54–55.
6. Соколов Б. С., Радайкин О. В. К расчету прогибов изгибаемых железобетонных элементов с учетом совместного действия изгибающих моментов и перерывающих сил с использованием нелинейной деформационной модели // Известия КГАСУ. 2014. № 4. С. 37–45.
7. Трекин Н. Н., Кодыш Э. Н., Соседов К. Е. Реализация нелинейной деформационной модели при расчете прочности нормальных сечений // Лелейтовские чтения-150 / под ред. А. Г. Тамразяна. М. : МГСУ, 2018. С. 467–475.
8. Трекин Н. Н., Кодыш Э. Н., Трекин Д. Н. Расчет по образованию нормальных трещин в изгибаемых элементах на основе деформационной модели // Современные проблемы расчета железобетонных конструкций, зданий и сооружений на аварийные воздействия / под ред. А. Г. Тамразяна, Д. Г. Копаницы. М. : МИСИ–МГСУ, 2016. С. 448–453.
9. Радайкин О. В. Развитие теории диаграммного метода расчета стержневых элементов из армированного бетона : дис. д-ра техн. наук. Казань, 2023. 471 с.  
URL: [https://shelly.kpfu.ru/e-ksu/docs/DISSERTATION/F\\_635920825/Dissertaciya\\_Radajkin\\_.pdf](https://shelly.kpfu.ru/e-ksu/docs/DISSERTATION/F_635920825/Dissertaciya_Radajkin_.pdf) (дата обращения: 17.08.2024).
10. Пекин Д. А. Нелинейные расчеты и «перераспределение» усилий в защемленной железобетонной балке при плоском изгибе // Промышленное и гражданское строительство. 2024. № 8. С. 41–47.  
doi: 10.33622/0869-7019.2024.08.41-47
11. Мурашев В. И. Трещиностойчивость, жесткость и прочность железобетона (Основы сопротивления железобетона). М. : Машстройиздат, 1950. 268 с.
12. Байков В. Н., Сигалов В. Н. Железобетонные конструкции. М. : Стройиздат, 1991. 767 с.
13. Залесов А. С., Климов Ю. А. Прочность железобетонных конструкций при действии поперечных сил. Киев : Будівельник, 1989. 104 с.
14. Пекин Д. А. Совершенствование методики расчета базового расстояния между нормальными трещинами в изгибаемых железобетонных элементах // Промышленное и гражданское строительство. 2022. № 12. С. 10–15.  
doi: 10.33622/0869-7019.2022.12.10-15

#### REFERENCES

1. Karpenko N. I., Muhamediev T. A., Sapozhnikov M. A. On the construction of a method for calculating core elements based on diagrams of deformation of materials. *Sovershenstvovanie metodov rascheta staticheski neopredelimyh zhelezobetonnih konstrukcij* [Improvement of calculation methods for statically indeterminate reinforced concrete structures]. Moscow, NIIZHB Publ., 1987, pp. 4–24. (In Russ.).
2. Karpenko S. N. On the construction of relationships between stress and strain increments based on various diagrams. *Vestnik grazhdanskih inzhenerov*, 2010, no. 1, pp. 60–63. (In Russ.).
3. Karpenko N. I., Sokolov B. S., Radajkin O. V. To determine the deformations of bent reinforced concrete elements using deformation diagrams of concrete and reinforcement. *Stroitel'stvo i rekonstrukciya*, 2012, no. 2, pp. 11–20. (In Russ.).
4. Karpenko N. I., Radajkin O. V. To improve concrete deformation diagrams for determining the moment of cracking and breaking moment in bent reinforced concrete elements. *Stroitel'stvo i rekonstrukciya*, 2012, no. 3, pp. 10–17. (In Russ.).
5. Karpenko N. I., Sokolov B. S., Radajkin O. V. Improvement of the methodology for calculating bent rein-



- forced concrete elements without prestressing the formation of normal cracks. *Stroitel'nye materialy*, 2013, no. 6, pp. 54–55. (In Russ.).
6. Sokolov B. S., Radajkin O. V. To calculate the deflections of bent reinforced concrete elements taking into account the combined action of bending moments and breaking forces using a nonlinear deformation model. *Izvestiya KGASU*, 2014, no. 4, pp. 37–45. (In Russ.).
  7. Trekin N. N., Kodysh E. N., Sosodov K. E. Implementation of a nonlinear deformation model for calculating the strength of normal sections. *Lolejtovskie chteniya-150* [Loleitov readings-150]. Moscow, MGSU Publ., 2018, pp. 467–475. (In Russ.).
  8. Trekin N. N., Kodysh E. N., Trekin D. N. Calculation of the formation of normal cracks in bendable elements based on the deformation model. *Sovremennye problemy rascheta zhelezobetonnykh konstrukcij, zdaniy i sooruzhenij na avarijnye vozdejstviya* [Современные проблемы расчета железобетонных конструкций, зданий и сооружений на аварийные воздействия]. Moscow, MISI–MGSU Publ., 2016, pp. 448–453. (In Russ.).
  9. Radajkin O. V. *Development of the theory of the diagrammatic calculation method for reinforced concrete core elements. Dis.* Kazan, 2023. 471 p. Available at: <https://shelly.kpfu.ru/e-ksu/docs/>
  - DISSERTATION/F\_635920825/Dissertaciya\_Radajkin\_.pdf (accessed 17.08.2024). (In Russ.).
  10. Pekin D. A. In a fixed-ended reinforced concrete beam under plane bending (In the order of discussion). *Promyshlennoe i grazhdanskoe stroitel'stvo*, 2024, no. 8, pp. 41–47. (In Russ.). doi: 10.33622/0869-7019.2024.08.41-47
  11. Murashev V. I. *Treshchinoustojchivost', zhestkost' i prochnost' zhelezobetona (Osnovy soprotivleniya zhelezobetona)* [Crack resistance, rigidity and strength of reinforced concrete (Fundamentals of resistance of reinforced concrete)]. Moscow, Mashstrojizdat Publ., 1950. 268 p. (In Russ.).
  12. Bajkov V. N., Sigalov V. N. *Zhelezobetonnye konstrukcii* [Reinforced concrete structures]. Moscow, Stroyizdat Publ., 1991. 767 p. (In Russ.).
  13. Zalesov A. S., Klimov Yu. A. *Prochnost' zhelezobetonnykh konstrukcij pri dejstvii poperechnykh sil* [The strength of reinforced concrete structures under the action of transverse forces]. Kiev, Budivel'nik Publ., 1989. 104 p. (In Russ.).
  14. Pekin D. A. Improving the method for calculating the distance between normal cracks in bent reinforced concrete elements. *Promyshlennoe i grazhdanskoe stroitel'stvo*, 2022, no. 12, pp.10–15. (In Russ.). doi: 10.33622/0869-7019.2022.12.10-15

УВАЖАЕМЫЕ ЧИТАТЕЛИ!

НАПОМИНАЕМ, ЧТО ОФОРМИТЬ ПОДПИСКУ НА ЖУРНАЛ  
**«ПРОМЫШЛЕННОЕ И ГРАЖДАНСКОЕ СТРОИТЕЛЬСТВО»**  
МОЖНО НАЧИНАЯ С ЛЮБОГО МЕСЯЦА В ЛЮБОМ ОТДЕЛЕНИИ СВЯЗИ  
ИЛИ В РЕДАКЦИИ, А ТАКЖЕ ПОДПИСАТЬСЯ НА ЭЛЕКТРОННУЮ ВЕРСИЮ ЖУРНАЛА.

ПОДПИСНЫЕ ИНДЕКСЫ ЖУРНАЛА В КАТАЛОГАХ:

• УРАЛ-ПРЕСС – **70695** • ПОЧТА РОССИИ – **ПП983** •

ПОДПИСКА НА НАШ ЖУРНАЛ, ВХОДЯЩИЙ В ЧИСЛО ВЕДУЩИХ  
НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИХ ИЗДАНИЙ ПО СТРОИТЕЛЬНОЙ ТЕМАТИКЕ, –  
ЭТО ВАШ ВКЛАД В РАЗВИТИЕ ОТЕЧЕСТВЕННОЙ НАУКИ И ОБРАЗОВАНИЯ.

ПОЛНЫЕ ТЕКСТЫ СТАТЕЙ, ОПУБЛИКОВАННЫЕ В ЖУРНАЛЕ  
**«ПРОМЫШЛЕННОЕ И ГРАЖДАНСКОЕ СТРОИТЕЛЬСТВО»** в 2010–2023 гг.,  
ПРЕДСТАВЛЕНЫ НА САЙТЕ ЖУРНАЛА В РАЗДЕЛЕ «АРХИВ».

ЖУРНАЛ «ПРОМЫШЛЕННОЕ И ГРАЖДАНСКОЕ СТРОИТЕЛЬСТВО» ИНДЕКСИРУЮТ:

НАУЧНАЯ ЭЛЕКТРОННАЯ БИБЛИОТЕКА  
**eLIBRARY.RU**

Russian Science Citation  
Index (RSCI) на платформе  
Web of Science

**ULRICHSWEB™**  
GLOBAL SERIALS DIRECTORY

САЙТ ЖУРНАЛА «ПРОМЫШЛЕННОЕ И ГРАЖДАНСКОЕ СТРОИТЕЛЬСТВО»: [www.pgs1923.ru](http://www.pgs1923.ru)