

УДК 624.042:691.328

doi: 10.33622/0869-7019.2022.12.10-15

Совершенствование методики расчета расстояния между нормальными трещинами в изгибаемых железобетонных элементах

Дмитрий Анатольевич ПЕКИН, кандидат технических наук, главный конструктор, dpekin@mail.ru

«ИНВ-Строй», 142105 Московская обл., г. Подольск, ул. Пионерская, 6-30

Аннотация. Рассмотрены советские, российские и европейские нормативные методики по определению базового расстояния между трещинами, нормальными к продольной оси изгибаемых железобетонных элементов. Расстояние между нормальными трещинами в изгибаемых железобетонных элементах оказывает существенное влияние на результаты расчета по трещиностойкости. Кроме того, данная характеристика может применяться при определении длин стержневых конечных элементов в задачах по моделированию конструктивных железобетонных систем в нелинейной постановке посредством разбиения фактических размеров элементов на расстояния между нормальными трещинами на основе линейного расчета от действия нагрузок, вызванных собственным весом конструкций. Такой подход в определении размеров конечных элементов стержневых железобетонных конструкций может стать основой для дальнейшего развития нелинейных расчетов методом конечных элементов. Выполнен анализ предпосылок, допущений и результатов расчета на примере консольной железобетонной балки. Предложены альтернативные направления развития методов расчета расстояния и ширины нормальных трещин железобетонных изгибаемых элементов.

Ключевые слова: железобетонные балки, образование трещин, шаг трещин, расстояние между трещинами, относительное расстояние между трещинами, ширина раскрытия трещин

Для цитирования: Пекин Д. А. Совершенствование методики расчета расстояния между нормальными трещинами в изгибаемых железобетонных элементах // Промышленное и гражданское строительство. 2022. № 12. С. 10 – 15. doi: 10.33622/0869-7019.2022.12.10-15

IMPROVING THE METHOD FOR CALCULATING THE DISTANCE BETWEEN NORMAL CRACKS IN BENT REINFORCED CONCRETE ELEMENTS

Dmitrii A. PEKIN, dpekin@mail.ru

INV-Stroy, Pionerskaya ul., 6-30, Podolsk 142105, Moscow region, Russian Federation

Abstract. The Soviet, Russian and European normative methods for determining the base distance between cracks normal to the longitudinal axis of bent reinforced concrete elements are considered. The distance between normal cracks in bent reinforced concrete elements has a significant impact on the results of the crack resistance calculation. In addition, this characteristic can be used when determining the lengths of bar finite elements in problems of modeling structural reinforced concrete systems in a non-linear setting by dividing the actual dimensions of the elements into distances between normal cracks based on a linear calculation from the action of loads caused by the own weight of structures. Such an approach in determining the dimensions of finite elements of reinforced concrete bar structures can become the basis for the further development of nonlinear calculations by the finite element method. The analysis of prerequisites, assumptions and calculations results is carried out on the example of free-end reinforced concrete beam. Alternative directions for the development of methods for crack distance and crack width calculating of reinforced concrete bending elements are proposed.

Keywords: reinforced concrete beams, crack formation, crack pitch, distance between cracks, relative distance between cracks, crack opening width

For citation: Pekin D. A. Improving the Method for Calculating the Distance Between Normal Cracks in Bent Reinforced Concrete Elements. *Promyshlennoe i grazhdanskoe stroitel'stvo* [Industrial and Civil Engineering], 2022, no. 12, pp. 10–15. (In Russ.). doi: 10.33622/0869-7019.2022.12.10-15

Расстояние между нормальными к продольной оси элемента трещинами — один из основных параметров для определения ширины их раскрытия как в российских (СП 63.13330.2018 «СНиП 52-01-2003 Бетонные и железобетонные конструкции. Основные положения»), так и в европейских (Еврокод 2 «Проектирование железобетонных конструкций. Часть 1-1. Общие правила и правила для

зданий») строительных нормах и правилах, регламентирующих проектирование железобетонных конструкций. В нормативах СНиП II-21-75, СНиП 2.03.01-84 «Бетонные и железобетонные конструкции» при расчете ширины раскрытия нормальных трещин вместо произведения расстояния между нормальными трещинами на коэффициент, учитывающий работу растянутого бетона (по СНиП

II-B.1-62), был введен эмпирический коэффициент, зависящий от коэффициента армирования и корня кубического из диаметра растянутой арматуры:

$$\psi_a l_T \rightarrow 20(3,5 - 100\mu)\sqrt[3]{d}. \quad (1)$$

Для нахождения расстояния между нормальными трещинами в СНиП II-B.1-62 использовались предположения и допущения проф. В. И. Мурашева [1] при выводе формулы (116) для элемента в состоянии чистого изгиба:

- первая трещина возникает в наиболее слабом месте в силу неоднородности бетона;
- напряжения в растянутом бетоне в сечении с трещиной равны нулю;
- по мере удаления от первой трещины напряжения в растянутой арматуре падают, а напряжения в бетоне возрастают до значений сопротивления бетона растяжению;
- новая смежная трещина образуется в сечении, удаленном от первой трещины, на достаточном расстоянии для снижения напряжений в арматуре до величины, отвечающей напряжению в бетоне при появлении трещины.

Применение данных предпосылок и допущений для определения расстояния между нормальными трещинами вызывает ряд вопросов и замечаний. Так, напряженное состояние железобетонного элемента в виде чистого изгиба на практике встречается очень редко и не является характерным. При исследовании бетонного элемента в отсутствие продольной рабочей арматуры или при наличии конструктивной данные предпосылки не будут оказывать существенного влияния. Не учитывается возможность изменения расстояния между смежными нормальными трещинами. Расстояние между нормальными трещинами определяется на основе напряжений в бетоне и арматуре, и не рассматривается основной для данного случая характеристика бетона — предельная относительная деформация.

В работах [2–11] содержатся предложения по уточнению базового расстояния между нормальными трещинами на основе:

- сравнения данных экспериментов и расчета коэффициентов корреляции основных параметров, определяющих искомое расстояние;
- длины анкеровки арматуры и линий влияния нормальных напряжений на блоки между нормальными трещинами;
- заимствования нормативной методики из Еврокода 2 или развития подхода [1], которые в настоящее время так и не нашли отражения в действующих нормах.

В СП 52-101-2003 и далее в СП 63.13330 авторы снова вернулись практически к исходной формулировке из СНиП II-B.1-62 с некоторой модификаци-

ей коэффициентов, входящих в формулу в виде множителей, из СНиП 2.03.01-84:

$$\delta\varphi_1 \eta \frac{\sigma_s}{E_s} 20(3,5 - 100\mu)\sqrt[3]{d} \rightarrow \varphi_1 \varphi_2 \varphi_3 \frac{\sigma_s}{E_s} \psi_s l_s. \quad (2)$$

Базовое расстояние между трещинами, нормальными к продольной оси элемента, согласно СП 63.13330 определяется по формуле и должно находиться в диапазоне

$$10d_s \text{ или } 10 \text{ см} \leq l_s = 0,5 \frac{A_{bt}}{A_s} d_s \leq \leq 40d_s \text{ или } 40 \text{ см}, \quad (3)$$

где A_{bt} — площадь сечения растянутого бетона перед образованием нормальных трещин (при $M = M_{cr}$) ограничена диапазоном

$$2ab \leq A_{bt} = by_t \leq \frac{bh}{2}, \quad (4)$$

a — расстояние от растянутой грани элемента до центра тяжести растянутой арматуры; b и h — ширина и высота элемента; y_t — высота растянутой зоны; A_s и d — площадь сечения и номинальный диаметр растянутой арматуры.

Максимальное расстояние между нормальными трещинами в соответствии с Еврокодом 2 зависит от шага продольной растянутой арматуры (обозначения далее приняты согласно выражениям (3) и (4)), т. е. по сути используется дифференцированный подход для различных конструктивных элементов:

- для балок, в которых шаг между продольной растянутой арматурой принимается минимальным из соображений бетонирования, не более $5(a + d_s/2)$, по формуле (7.11):

$$l_{s,\max} = k_3 a + k_1 k_2 k_4 d_s / \rho_{p,\text{eff}}, \quad (5)$$

где k_1 — коэффициент, учитывающий профиль арматуры (при периодическом профиле $k_1 = 0,8$); k_2 — коэффициент, характеризующий НДС элемента (при изгибе $k_2 = 0,5$); k_3, k_4 — эмпирические коэффициенты, $k_3 = 3,4$ и $k_4 = 0,425$; $\rho_{p,\text{eff}}$ — коэффициент, учитывающий соотношение площадей растянутых арматуры и бетона, $\rho_{p,\text{eff}} = A_s / A_{bt}$; A_{bt} — эффективная площадь растянутого бетона, окружающего арматуру и принимаемая наименьшей из следующих значений $2,5a$, или $(h - x)/3$, или $h/2$; x — высота сжатой зоны бетона на предельной стадии;

- для плит, в которых ширина раскрытия трещин на участках между продольной арматурой больше, чем вблизи нее, по формуле (7.14):

$$l_{s,\max} = 1,3(h - x). \quad (6)$$

Следует отметить, что в ряде случаев в Еврокоде 2 допускается не выполнять расчет по ограничению ширины раскрытия нормальных трещин, так же как и в п. 1.11 СНиП 2.03.01-84.

Определим базовое расстояние между нормальными трещинами согласно СП 63.13330 на примере консольной балки.

Дано: поперечное сечение $30 \times 50(h)$ см, длина пролета $l = 3$ м, расчетная внешняя сосредоточенная сила на свободном конце консоли $P = 60$ кН, осредненный коэффициент надежности по нагрузке $\gamma_{f,red} = 1,2$, бетон класса прочности при сжатии В25, растянутая арматура $3\varnothing 22$ А500, $A_s = 11,4$ см², $a = 5$ см, сжатая арматура $2\varnothing 12$ А500, $A'_s = 2,26$ см², $a' = 5$ см, высота растянутой зоны бетона $y_t = 24,2$ см (при $M = M_{crc}$). Тогда искомое расстояние составит:

$$2ab = 300 \text{ см}^2 \leq A_{br} = by_t = 726 \text{ см}^2 \leq \quad (7)$$

$$\leq \frac{bh}{2} = 750 \text{ см}^2;$$

$$22 \text{ или } 10 \text{ см} \leq l_s = 0,5 \frac{726}{11,4} 2,2 = \quad (8)$$

$$= 70 \text{ см} \leq 88 \text{ или } 40 \text{ см.}$$

Таким образом, при расчете ширины раскрытия нормальных трещин базовое расстояние между ними должно приниматься равным 40 см и практически никак не зависит от механических характеристик бетона. Например, при увеличении класса бетона до В30 и аналогичных параметрах армирования высота растянутой зоны бетона в момент образования трещины увеличивается всего на 1 мм, что не оказывает влияния.

Для сравнения полученного результата с методикой СНиП 2.03.01-84 вычислим коэффициент, учитывающий работу растянутого бетона между нормальными трещинами:

$$\psi_s = 1 - 0,8 \frac{M_{crc}}{M_{ser}} = 1 - 0,8 \frac{28,9}{150} = 0,85 \leq 1; \quad (9)$$

$$20(3,5 - 100\mu) \sqrt[3]{d} = \quad (10)$$

$$= 20 \left(3,5 - 100 \frac{11,4}{30 \cdot 45} \right) \sqrt[3]{2,2} = 14,9 \text{ см.}$$

Для сравнения полученного результата с методикой Еврокода 2 необходимо вычислить коэффициент, определяющий применение формул (5) или (6):

$$5(a + d_s/2) = 5(5 + 2,2/2) = 30,5 \text{ см} > 10 \text{ см.}$$

Следовательно, по формуле (5) получим:

$$l_{s,max} = k_3 a + k_1 k_2 k_4 d_s A_{br} / A_s = \quad (11)$$

$$= 3,4 \cdot 5 + 0,8 \cdot 0,5 \cdot 0,425 \cdot 2,2 \cdot 12,5 / 11,4 = 17,4 \text{ см.}$$

По результатам сравнения формул (8) и (11) видно, что методика СП 63.13330, аналогичная Еврокоду 2 без учета коэффициентов k_1 и k_4 , существенно увеличивает базовое расстояние между нормальными трещинами, что, очевидно, ведет в процессе вычислений к увеличению ширины их рас-

крытия. Также следует отметить, что результаты вычислений по формулам (10) и (11) очень близки между собой и базируются на данных многочисленных испытаний.

Другой важный аспект применения базового расстояния между нормальными трещинами — количество разбиений или длина стержневых конечных элементов (КЭ) при выполнении расчетов с учетом физической нелинейности, образования и раскрытия трещин в программных комплексах на базе МКЭ или линеаризованных расчетов с изменением изгибных жесткостей КЭ, предлагаемых разными специалистами. Например, в работе проф. С. Ю. Фиалко [12] при решении задачи изгиба шарнирно-опертой балки сечением $20 \times 40(h)$ см и длиной пролета 4 м, а также сосредоточенной силой в середине для сравнения с экспериментальными данными и альтернативным методом расчета рассматривалась модель половины балки с учетом условий симметрии и разбиения на 16 конечных элементов, т. е. длина одного КЭ составляла 12,5 см. Выбор количества разбиений объясняется отсутствием влияния на результаты расчета дальнейшего уменьшения длины КЭ.

При решении других подобных задач на основе этой стержневой модели и наличии экспериментальных данных специалисты вынуждены подбирать длину КЭ таким образом, чтобы результаты расчета прогибов или иных измеренных при испытаниях параметров физической модели с достаточной точностью совпадали со значениями математической модели. Очевидно, что при всем многообразии габаритов элементов и механических характеристик материалов только для стержневых железобетонных конструкций, достаточно сложно сформулировать единый критерий для их разбиения на КЭ, о чем свидетельствуют рекомендации [13] сделать подобный выбор при расчете самостоятельно. В этой связи использование такого параметра как базовое расстояние между нормальными трещинами может послужить важной предпосылкой для дальнейшего развития подходов и методов расчета.

Определение базового расстояния между нормальными трещинами в изгибаемых стержневых железобетонных элементах предлагается выполнять в первую очередь на основе деформационных характеристик бетона и следующих предпосылок:

- первая нормальная к продольной оси трещина в конструктивном элементе возникает в зоне действия максимального изгибающего момента от постоянных нагрузок при достижении им значения $M = M_{crc}$;
- относительные деформации растяжения на участке между первой и второй нормальными трещинами принимаются равномерно распределенными

по длине растянутой грани элемента и равными $\varepsilon_{red} = \varepsilon_{bt0}$ (с учетом продолжительности действия нагрузок);

• следующая нормальная трещина возникает на расстоянии, определенном с учетом характера нагрузок, граничных условий, геометрических характеристик и т. д.

На примере рассмотренной консольной балки, указанных исходных данных и расчетных предположений получим:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{red} = \varepsilon_{bt0} &= \frac{1}{l-l_1} \int_{l_1}^l \frac{\sigma_{bt, crc}}{E_{bt}} dL = & (12) \\ &= \frac{1}{l-l_1} \int_{l_1}^l \frac{M_{crc} y_t}{E_{bt} I_{red}} dL = \frac{P_2 y_t}{(l-l_1) E_{bt} I_{red}} \int_{l_1}^l L dL = \\ &= \frac{P_2 y_t}{(l-l_1) E_{bt} I_{red}} \frac{L^2}{2} \Big|_{l_1}^l = \frac{P_2 y_t}{(l-l_1) E_{bt} I_{red}} \frac{l^2 - l_1^2}{2} = \\ &= \frac{P_2 y_t (l+l_1)}{2 E_{bt} I_{red}} = \frac{M_{crc} y_t (l+l_1)}{2 E_{bt} I_{red} l_1}, \end{aligned}$$

где l – длина пролета консольной балки или расстояние от свободного конца до первой нормальной трещины (в данном случае в заделке); l_1 – расстояние от свободного конца до второй нормальной трещины; $\sigma_{bt, crc}$ – нормальные растягивающие напряжения на грани балки в момент образования нормальных трещин, $\sigma_{bt, crc} = M_{crc} y_t / I_{red}$; y_t – расстояние от растянутой грани до центра тяжести приведенного нормального сечения до появления трещин; I_{red} – момент инерции приведенного нормального сечения до появления трещин относительно центральной оси, перпендикулярной плоскости изгиба; E_{bt} – начальный модуль упругости бетона; M_{crc} – изгибающий момент при образовании второй трещины, $M_{crc} = P_2 L$; P_2 – внешняя сосредоточенная сила на свободном конце консоли при образовании второй трещины, $P_2 = P_{crc} + \Delta P = M_{crc} / l_1$; P_{crc} – внешняя сосредоточенная сила на свободном конце консоли при образовании первой трещины; ΔP – приращение внешней нагрузки на свободном конце консоли, необходимое для образования второй трещины.

Физический смысл формулы (12) заключается в суммировании растягивающих относительных деформаций на грани балки после образования первой нормальной трещины в некотором диапазоне по длине (для определения соответствующего относительного удлинения) до образования второй нормальной трещины на основе известной теоремы о среднем значении интегрального исчисления [14]. С учетом полученного выражения (12) расстояние до второй нормальной трещины составит

$$l_1 = \frac{M_{crc} y_t l}{2 E_{bt} I_{red} \varepsilon_{bt0} - M_{crc} y_t} = \frac{l}{\frac{2 E_{bt} I_{red} \varepsilon_{bt0}}{M_{crc} y_t} - 1}. \quad (13)$$

Тогда базовое расстояние между первой и второй нормальными трещинами определяется как разность

$$l_s = l - l_1. \quad (14)$$

С учетом исходных данных и при использовании постоянного значения $\varepsilon_{bt0} = 0,0001$ для нагрузок непродолжительного действия и любого класса бетона (в отличие от модуля деформаций или прочности) согласно СП 63.11330 получим:

$$l_1 = \frac{3}{\frac{2 \cdot 3 \cdot 10^7 \cdot 0,003473 \cdot 0,0001}{28,9 \cdot 0,242} - 1} = 1,52 \text{ м}; \quad (15)$$

$$l_s = 3 - 1,52 = 1,48 \text{ м}. \quad (16)$$

Это, очевидно, приводит к существенному завышению расстояния между нормальными трещинами. Например, при снижении значения до $\varepsilon_{bt0} = 0,00007$ (снижение предельной относительной деформации на 30 %) и сохранении остальных параметров получим:

$$l_1 = \frac{3}{\frac{2 \cdot 3 \cdot 10^7 \cdot 0,003473 \cdot 0,00007}{28,9 \cdot 0,242} - 1} = 2,77 \text{ м}; \quad (17)$$

$$l_s = 3 - 2,77 = 0,23 \text{ м}. \quad (18)$$

Понятно, что предельная относительная деформация бетона при растяжении, как и другие механические характеристики, должна зависеть от его класса, и это может стать предметом дальнейших экспериментальных исследований. Например, связать этот параметр с относительной деформацией бетона при растяжении, соответствующей достижению $R_{bt, ser}$, увеличенной на коэффициент ω :

$$\varepsilon_{bt0} = \omega \frac{R_{bt, ser}}{E_{bt}} = 1,35 \frac{1,55}{30000} = 0,00007. \quad (19)$$

Таким образом получим расстояние от свободного конца балки до второй нормальной трещины и расстояние между первой и второй трещинами, как в формулах (17)–(18).

Другим важным и более универсальным параметром может стать относительное базовое расстояние между нормальными трещинами, которое позволит находить базовое расстояние между нормальными трещинами на основе длины элемента:

$$\varepsilon_{l, crc} = l_s / l; \quad (20)$$

$$l_s = \varepsilon_{l, crc} l. \quad (21)$$

Из выражений (13)–(14) получим

$$\varepsilon_{l, crc} = \frac{l_s}{l} = \frac{l - l_1}{l} = 1 - \frac{l_1}{l} = 1 - \frac{1}{\frac{2 E_{bt} I_{red} \varepsilon_{bt0}}{M_{crc} y_t} - 1}. \quad (22)$$

Базовое расстояние между нормальными трещинами в стержневых железобетонных элементах по аналогии можно определить на основе удлинения изогнутой продольной оси элемента. Рассмотрим частный случай изгиба консольной балки

$$\varepsilon_{bt0} = \frac{\Delta l}{l_s} = \frac{l_t - l_s}{l_s}, \quad (23)$$

где Δl – удлинение продольной оси элемента; l_t – длина изогнутой продольной оси элемента на базе l_s .

Известны выражения для расчета длины плоской кривой [14] и в нашем случае для прогибов изогнутой продольной оси консольной балки с сосредоточенной силой на свободном конце [15]:

$$l_t = \int_{l_1}^l \sqrt{1 + v'^2} dL; \quad (24)$$

$$v = -\frac{Pl^3}{3E_{bt}I_{red}} \left(1 - \frac{3L}{2l} + \frac{1}{2} \left(\frac{L}{l} \right)^3 \right). \quad (25)$$

Тогда с учетом формул (24)–(25) получим:

$$v' = \frac{dv}{dL} = \frac{Pl^2}{2E_{bt}I_{red}} - \frac{PL^2}{2E_{bt}I_{red}} = \quad (26)$$

$$= \frac{P}{2E_{bt}I_{red}} (l^2 - L^2);$$

$$l_t = \int_{l_1}^l \sqrt{1 + \left(\frac{P}{2E_{bt}I_{red}} (l^2 - L^2) \right)^2} dL. \quad (27)$$

К сожалению, подынтегральное выражение в формуле (27) не относится к простым функциям, первообразную которой можно получить на основе элементарных функций известными способами математического анализа, и поэтому в будущем может стать предметом дальнейших исследований с использованием другого инструментария.

Кроме того, необходимо отметить, что при определении ширины раскрытия нормальных трещин базовое расстояние для первой и второй нормальных трещины отличается в 2 раза, т. е. для первой трещины оно должно приниматься равным $l_s/2$. Следовательно, необходимо также учитывать специфику рассчитываемых конструкций для корректного определения ширины раскрытия нормальных трещин и предъявляемых к ней ограничений.

Вывод

Поиск зависимостей и уточнение базового расстояния между трещинами, нормальными к продольной оси элемента, и его относительной величины на основе деформационных характеристик бетона представляет собой актуальную задачу, требующую проведения экспериментальных исследований на бетонах и арматуре различных видов и классов.

Таким образом, нормативная методика расчета согласно п. 8.2.17 СП 63.13330 по определению базового расстояния между нормальными трещинами и ширины их раскрытия с учетом приведенных примеров требует корректировки.

СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. Мурашев В. И. Трещиноустойчивость, жесткость и прочность железобетона (Основы сопротивления железобетона). М.: Изд-во Министерства строит. предприятий машиностроения, 1950. 268 с.
2. Карпенко Н. И. Теория деформирования железобетона с трещинами. М.: Стройиздат, 1976. 208 с.
3. Карпенко Н. И. Общие модели механики железобетона. М.: Стройиздат, 1996. 416 с.
4. Карпенко Н. И., Горшенина Е. В. Метод расчета расстояния между трещинами в изгибаемых железобетонных элементах // Бетон и железобетон. 2006. № 5. С. 13–15.
5. Иваненко А. Н., Иваненко Н. А., Пересыпкин Е. Н. Расстояние между трещинами в изгибаемых железобетонных элементах на основе блочной модели // Интернет-журнал «Наукоеведение». 2015. Т. 7. № 1. URL: <http://naukovedenie.ru/PDF/26TVN115.pdf> (дата обращения: 15.09.2022).
6. Иваненко А. Н., Иваненко Н. А., Пересыпкин Е. Н. Трещиностойкость железобетонных конструкций как функция предельной растяжимости бетона // Инженерный вестник Дона. 2014. № 3. С. 2788.
7. Иваненко А. Н., Иваненко Н. А., Пересыпкин Е. Н., Пересыпкин С. Е. Напряженно-деформированное состояние стержневых железобетонных внецентренно нагруженных элементов в стадии трещинообразования // Инновации. Менеджмент. Маркетинг. Туризм. 2014. № 2. С. 162–165.
8. Панфилов Д. А., Мурашкин В. Г. Усовершенствованная методика расчета общих прогибов изгибаемых железобетонных элементов с учетом дискретного трещинообразования, применительно к обычным и высокопрочным бетонам // Строительство и реконструкция. 2011. № 6. С. 30–42.
9. Мурашкин Г. В., Панфилов Д. А., Мурашкин В. Г. Исследование влияния расстояния между трещинами на прогибы изгибаемых железобетонных элементов при кратковременном нагружении // Вестник Волгогр. гос. архит.-строит. ун-та. Серия: Строительство и архитектура. 2013. Вып. 31(50). Ч. 2. С. 388–391.
10. Колчунов Вл. И., Никулин А. И., Обернихин Д. В.

Ширина раскрытия трещин железобетонных конструкций трапециевидного поперечного сечения с учетом новых эффектов сопротивления // Вестник БГТУ им. В. Г. Шухова. 2018. № 10. С. 64–73.

11. Яловая Ю. С., Тур В. В. Зависимость между шириной раскрытия трещин нормального отрыва и прогибом в железобетонных балках // Безопасность строительного фонда России: проблемы и решения: Материалы международных академических чтений (Курск, 15 ноября 2019 г.). Курск: КГУ, 2019. С. 201–208.
12. Фиалко С. Ю. Применение метода конечных элементов к анализу прочности и несущей способности тонкостенных железобетонных конструкций с учте-

том физической нелинейности. М.: СКАД СОФТ, АСВ, 2018. 192 с.

13. Давидюк А. Н., Ведяков И. И., Крылов С. Б. [и др.]. Бетонные и железобетонные конструкции. Нелинейные расчеты при проектировании. М.: ФАУ «Федеральный центр нормирования, стандартизации и оценки соответствия в строительстве», 2017. 106 с.
14. Фихтенгольц Г. М. Основы математического анализа. Часть 1. СПб: Лань, 2015. 448 с.
15. Павлов П. А., Паршин Л. К., Мельников Б. Е., Шерстнев В. А. Сопротивление материалов. СПб: Лань, 2007. 554 с.

REFERENCES

1. Murashev V. I. *Treshchinoustojchivost', zhestkost' i prochnost' zhelezobetona (Osnovy soprotivleniya zhelezobetona)* [Crack resistance, rigidity and strength of reinforced concrete (Fundamentals of resistance of reinforced concrete)]. Moscow, Ministerstvo stroit. predpriyatij mashinostroeniya Publ., 1950. 268 p. (In Russ.).
2. Karpenko N. I. *Teoriya deformirovaniya zhelezobetona s treshchinami* [Theory of deformation of reinforced concrete with cracks]. Moscow, Strojizdat Publ., 1976. 208 p. (In Russ.).
3. Karpenko N. I. *Obshchie modeli mekhaniki zhelezobetona* [General models of reinforced concrete mechanics]. Moscow, Strojizdat Publ., 1996. 416 p. (In Russ.).
4. Karpenko N. I., Gorshenina E. V. Method for calculating the distance between cracks in bent reinforced concrete elements. *Beton i zhelezobeton*, 2006, no. 5, pp. 13–15. (In Russ.).
5. Ivanenko A. N., Ivanenko N. A., Peresyppkin E. N. The distance between cracks in bent reinforced concrete elements based on the block model. *Internet-zhurnal "Naukovedenie"*, 2015, vol. 7, no. 1. Available at: <http://naukovedenie.ru/PDF/26TVN115.pdf> (accessed 15.09.2022). (In Russ.).
6. Ivanenko A. N., Ivanenko N. A., Peresyppkin E. N. Crack resistance of reinforced concrete structures as a function of the ultimate extensibility of concrete. *Inzhenernyj vestnik Dona*, 2014, no. 3, p. 2788. (In Russ.).
7. Ivanenko A. N., Ivanenko N. A., Peresyppkin E. N., Peresyppkin S. E. The stress-strain state of the core reinforced concrete non-centrally loaded elements at the stage of cracking. *Innovacii. Menedzhment. Marketing. Turizm*, 2014, no. 2, pp. 162–165. (In Russ.).
8. Panfilov D. A., Murashkin V. G. An improved method for calculating the total deflections of bent reinforced concrete elements, taking into account discrete cracking, in relation to conventional and high-strength concrete. *Stroitel'stvo i rekonstrukciya*, 2011, no. 6, pp. 30–42. (In Russ.).
9. Murashkin G. V., Panfilov D. A., Murashkin V. G. Investigation of the effect of the distance between cracks on the deflections of bent reinforced concrete elements during short-term loading. *Vestnik Volgogr. gos. arhit.-stroit. un-ta. Seriya: Stroitel'stvo i arhitektura*, 2013, iss. 31(50), part 2, pp. 388–391. (In Russ.).
10. Kolchunov V. I., Nikulin A. I., Obernihin D. V. Width of crack opening of reinforced concrete structures of trapezoidal cross-section taking into account new resistance effects. *Vestnik BGTU im. V. G. Shuhova*, 2018, no. 10, pp. 64–73. (In Russ.).
11. Yalovaya Yu. S., Tur V. V. The relationship between the opening width of cracks of normal separation and deflection in reinforced concrete beams. *Bezopasnost' stroitel'nogo fonda Rossii problemy i resheniya* [Safety of the Russian Construction fund accounts and solutions]. Kursk, November 15, 2019. Kursk, KGU Publ., 2019, pp. 201–208. (In Russ.).
12. Fialko S. Yu. *Primenenie metoda konechnyh elementov k analizu prochnosti i nesushchej sposobnosti tonkostennykh zhelezobetonnykh konstrukcij s uchedom fizicheskoy nelinejnosti* [Application of the finite element method to the analysis of strength and bearing capacity of thin-walled reinforced concrete structures taking into account physical nonlinearity]. Moscow, SKAD SOFT, ASV Publ., 2018. 192 p. (In Russ.).
13. Davidyuk A. N., Vedyakov I. I., Krylov S. B. et al. *Betonnye i zhelezobetonnye konstrukcii. Nelinejnye raschetny pri proektirovanii* [Concrete and reinforced concrete structures. Nonlinear calculations in the design]. Moscow, FAU "Federal'nyj centr normirovaniya, standartizacii i ocenki sootvetstviya v stroitel'stve", 2017. 106 p. (In Russ.).
14. Fihngol'c G. M. *Osnovy matematicheskogo analiza* [Fundamentals of mathematical analysis]. St. Petersburg, Lan' Publ., 2015. Part 1. 448 p. (In Russ.).
15. Pavlov P. A., Parshin L. K., Mel'nikov B. E., Sherstnev V. A. *Soprotivlenie materialov* [Resistance of materials]. St. Petersburg, Lan' Publ., 2007. 554 p. (In Russ.). ■