

ИФО | 01.03.04 | ПМ | 6-й семестр

Строительные конструкции

Лекция №22



НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ

**СТРОИТЕЛЬНЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ**

www: mgsu.ru/universityabout/Struktura/Kafedri/ZhBK/

e-mail: gbk@mgsu.ru; dpekin@mail.ru

тел.: +7 495 287 49 14 доб. 3036, 3084

Пекин Дмитрий Анатольевич, доцент, к.т.н.

Лекция №22 – Железобетонные конструкции

Расчет железобетонных конструкций (ЖБК) по II предельному состоянию:

- Общие положения
- Недопущение образования трещин
- Ограничение ширины раскрытия трещин
- Ограничение деформаций (перемещений)

Общие положения расчета ЖБК по II группе ПС

Выполняется комплекс расчетов на действие изгибающих моментов и продольных сил в нормальных сечениях:

- На основе нелинейной деформационной модели согласно 8.2.14, 8.2.32, 6.1.24-6.1.26, 8.1.20-8.1.30 СП 63.13330, но с учетом сопротивления бетона растяжению
- На основе линейного расчета для элементов простого сечения (прямоугольного, таврового или двутаврового) с арматурой, расположенной вдоль граней, при учете изменения геометрических характеристик сечения, пластической работы бетона и ползучести в сжатой зоне бетона согласно 8.2.10-8.2.13, 8.2.15-8.2.31 СП 63.13330

Расчет ЖБК с использованием НДМ (п. 8.2.14 СП 63)

Нелинейной деформационной модели производят на основе диаграмм состояния (σ - ϵ) бетона и арматуры с учетом следующих положений:

- Распределение относительных деформаций бетона и арматуры по высоте сечения принимают по линейному закону (гипотеза плоских сечений)
- Связь между осевыми напряжениями и относительными деформациями бетона и арматуры принимают в виде диаграмм состояния бетона и арматуры
- Учитывается сопротивление растянутого бетона
- Критериями соответствия II группе ПС являются недопущение образования трещин, ограничения ширины раскрытия трещин и деформаций (перемещений)

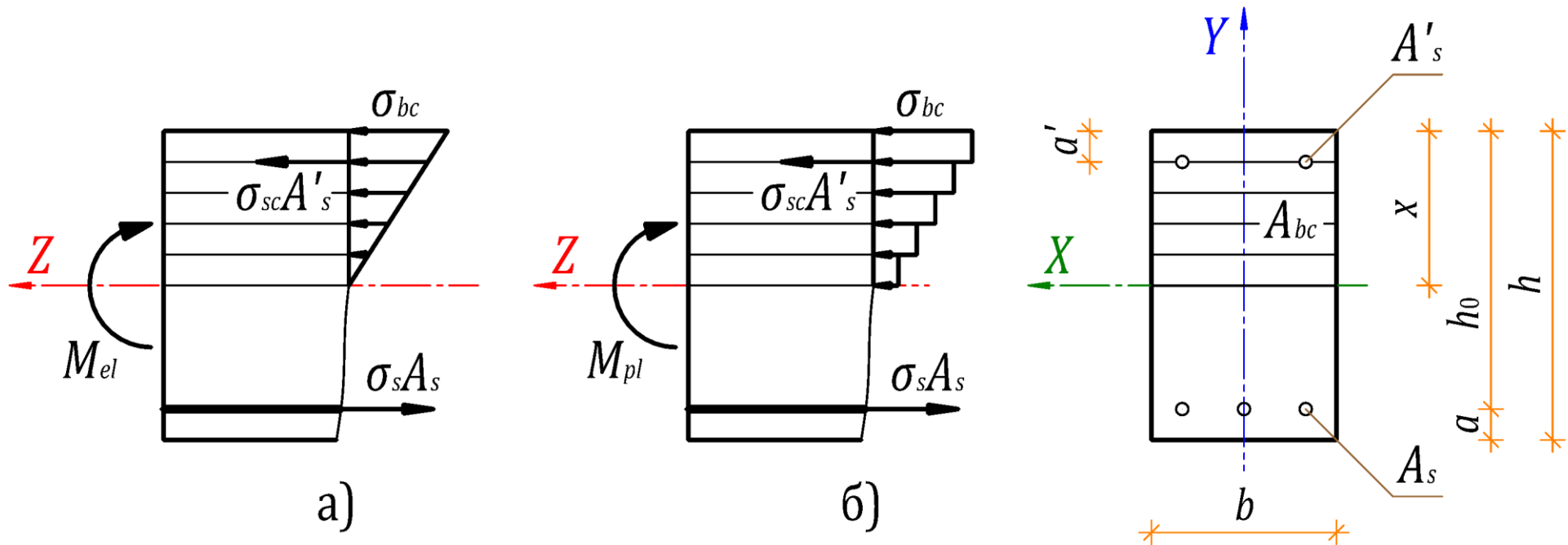
Расчет ЖБК простого сечения (п. 8.2.10, 8.2.27 СП 63)

Выполняется в неблагоприятных нормальных сечениях на основе определения фактически действующих усилий в бетоне и арматуре с учетом следующих положений:

- Сечения после деформирования остаются **плоскими**
- Эпюру напряжений в сжатой зоне бетона принимают **треугольной** формы, как для упругого тела
- Эпюру напряжений в растянутой зоне бетона принимают **трапециевидной** формы с напряжениями и деформациями, не превышающими $R_{bt,ser}$ и $\varepsilon_{bt,ult}$ соответственно (при расчете по недопущению образования трещин)
- Работу растянутого бетона в сечениях с трещиной не учитывают, а между ними учитывают с помощью коэффициента ψ_s (при расчете по ограничению ширины раскрытия трещин)
- Напряжения в арматуре принимают в зависимости от относительных деформаций, как для упругого тела

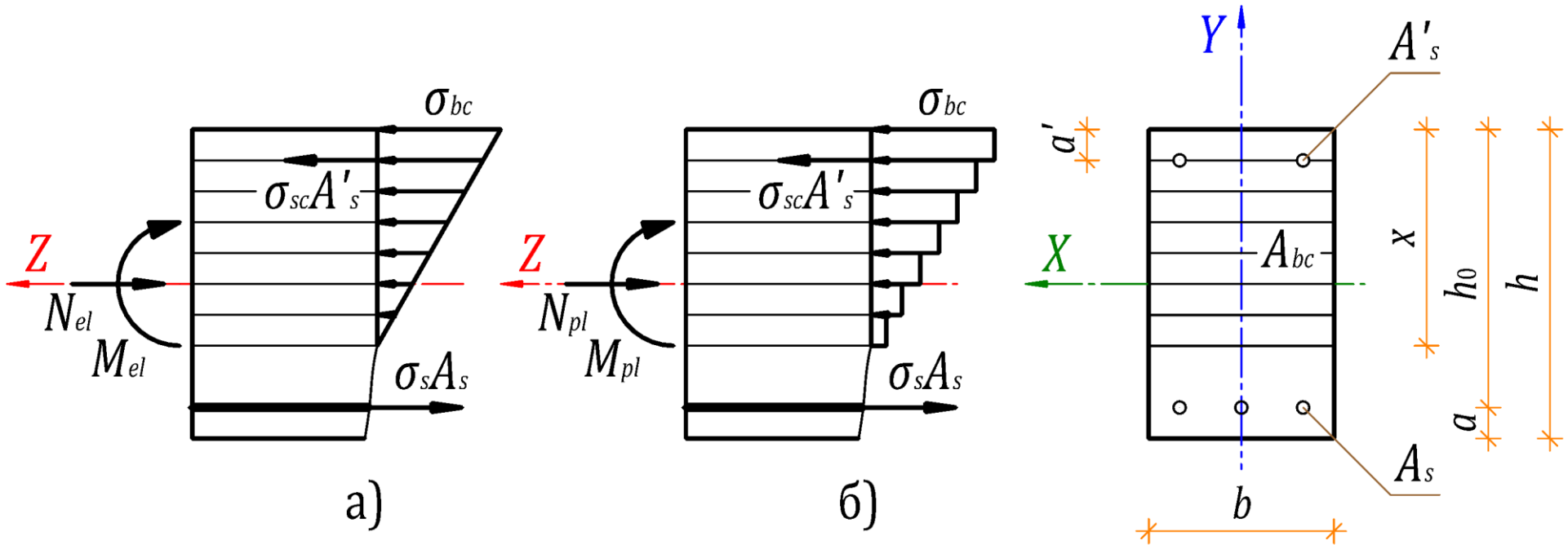
Эпюры нормальных напряжений в сечении с трещиной:

- **а)** – эпюра, принимаемая для расчетов изгибаемых ЖБК простого сечения после выполнения линейных расчетов
- **б)** – эпюра, принимаемая для расчетов изгибаемых ЖБК на основе нелинейной деформационной модели



Эпюры нормальных напряжений в сечении с трещиной:

- **а)** – эпюра, принимаемая для расчетов внецентренно сжатых ЖБК простого сечения после выполнения линейных расчетов
- **б)** – эпюра, принимаемая для расчетов внецентренно сжатых ЖБК на основе нелинейной деформационной модели



Расчет по образованию трещин (п. 8.2.4, 8.2.11 СП 63)

В изгибаемых элементах простого сечения выполняется по формуле:

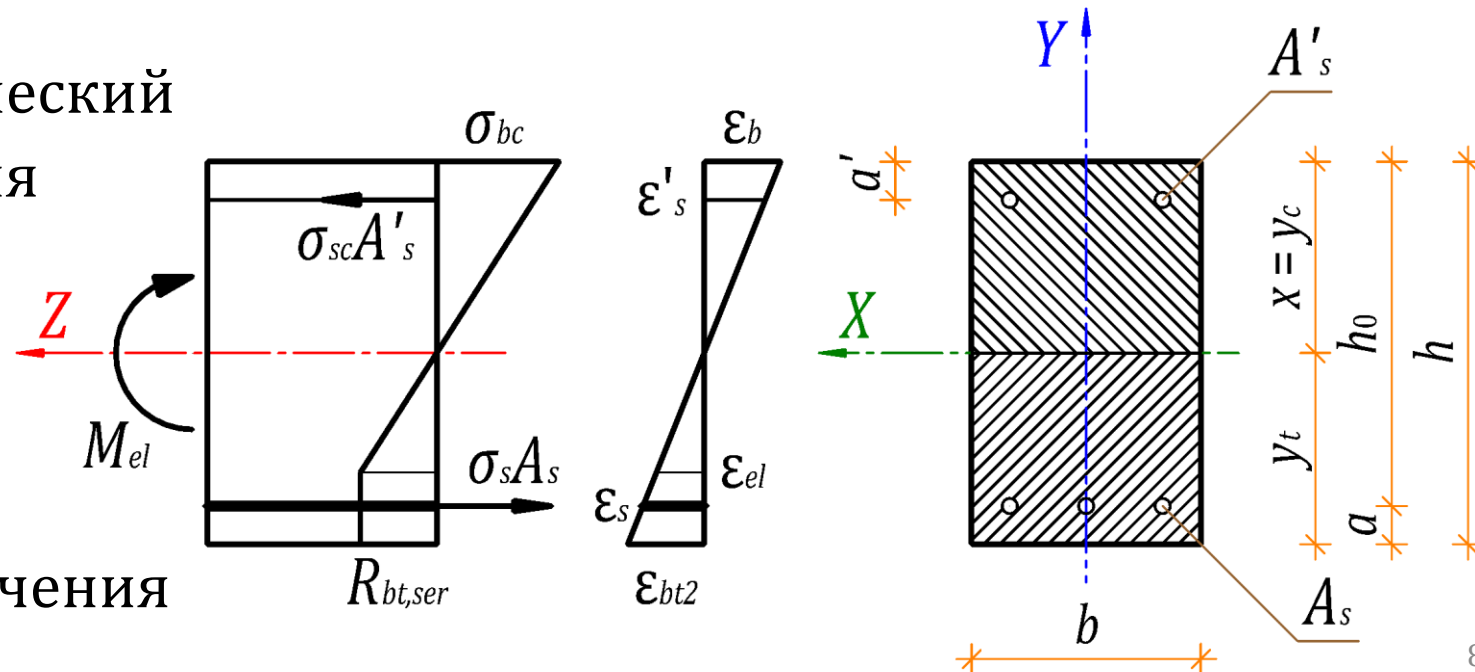
$$M_{el} > M_{crc} = R_{bt,ser} \cdot W_{pl}$$

где M_{el} – изгибающий момент от внешней нагрузки

$R_{bt,ser} = R_{bt,n} / \gamma_{bt}$ – расчетное сопротивление бетона осевому растяжению для II группы ПС ($\gamma_{bt} = 1$)

$W_{pl} = 1,3W_{red}$ – упругопластический момент сопротивления сечения для крайнего растянутого волокна бетона

W_{red} – упругий момент сопротивления приведенного сечения по растянутой зоне сечения



Упругий момент сопротивления (п. 8.2.12 СП 63)

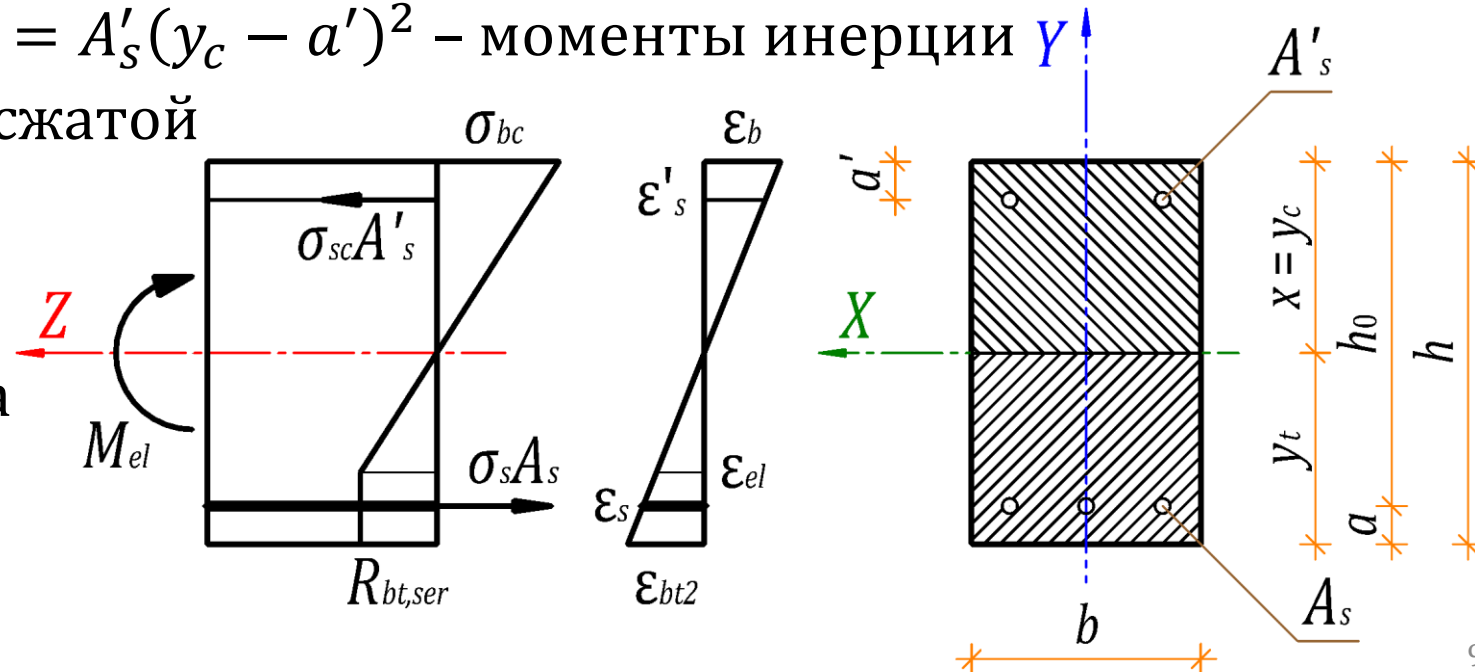
Для крайнего растянутого волокна бетона определяется по формуле:

$$W_{x,t,red} = \frac{I_{x,red}}{y_t}$$

где $I_{x,red} = I_x + \alpha I_{x,s} + \alpha I'_{x,s}$ – момент инерции приведенного сечения элемента относительно его центра тяжести, $\alpha = E_s/E_b$ – коэффициент приведения

$I_x = \frac{bh^3}{12}$, $I_{x,s} = A_s(y_t - a)^2$ и $I'_{x,s} = A'_s(y_c - a')^2$ – моменты инерции сечений бетона, растянутой и сжатой арматуры соответственно

$y_t = \frac{S_{x,t,red}}{A_{red}}$ – расстояние от наиболее растянутого волокна бетона до центра тяжести приведенного поперечного сечения элемента



Геометрические характеристики (п. 8.2.12 СП 63)

Площадь приведенного поперечного сечения элемента определяется по формуле:

$$A_{red} = A + \alpha A_s + \alpha A'_s$$

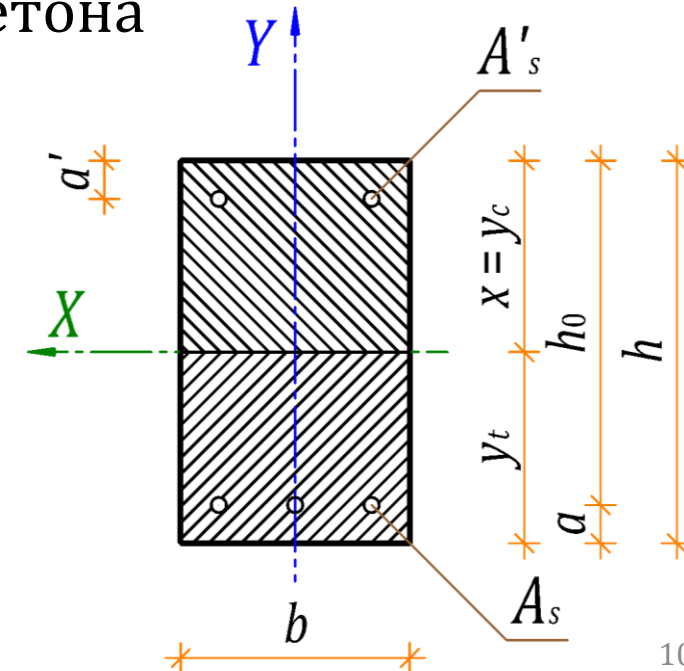
где A , A_s и A'_s – площадь сечений бетона, растянутой и сжатой арматуры

Статический момент площади приведенного поперечного сечения элемента относительно наиболее растянутого волокна бетона определяется по формуле:

$$S_{x,t,red} = Ah/2 + \alpha A_s a + \alpha A'_s (h - a')$$

Расстояние от наиболее растянутого волокна бетона до центра тяжести приведенного поперечного сечения элемента:

$$y_t = \frac{S_{x,t,red}}{A_{red}} = \frac{Ah/2 + \alpha A_s a + \alpha A'_s (h - a')}{A + \alpha A_s + \alpha A'_s}$$



Пример 1. Расчет балки по образованию трещин

Дано: монолитная железобетонная балка сечением $b \times h - 300 \times 500$ мм пролетом $l = 3,0$ м, $a = a' = 50$ мм, бетон класса В25 ($E_b = 30000$ МПа, $R_b = 14,5$ МПа, $R_{bt,ser} = 1,55$ МПа), арматура класса А500 ($E_s = 200000$ МПа, $R_s = 435$ МПа, $R_{sc} = 400(435)$ МПа), полная нагрузка $P_Y = 200$ кН, в том числе постоянная и длительная нагрузка $P_{Yl} = 160$ кН, приложенная на расстоянии $l_p = 1,0$ м от опор, шарнирные узлы сопряжения, осредненный $\gamma_{f,red} = 1,25$, площадь продольной арматуры:

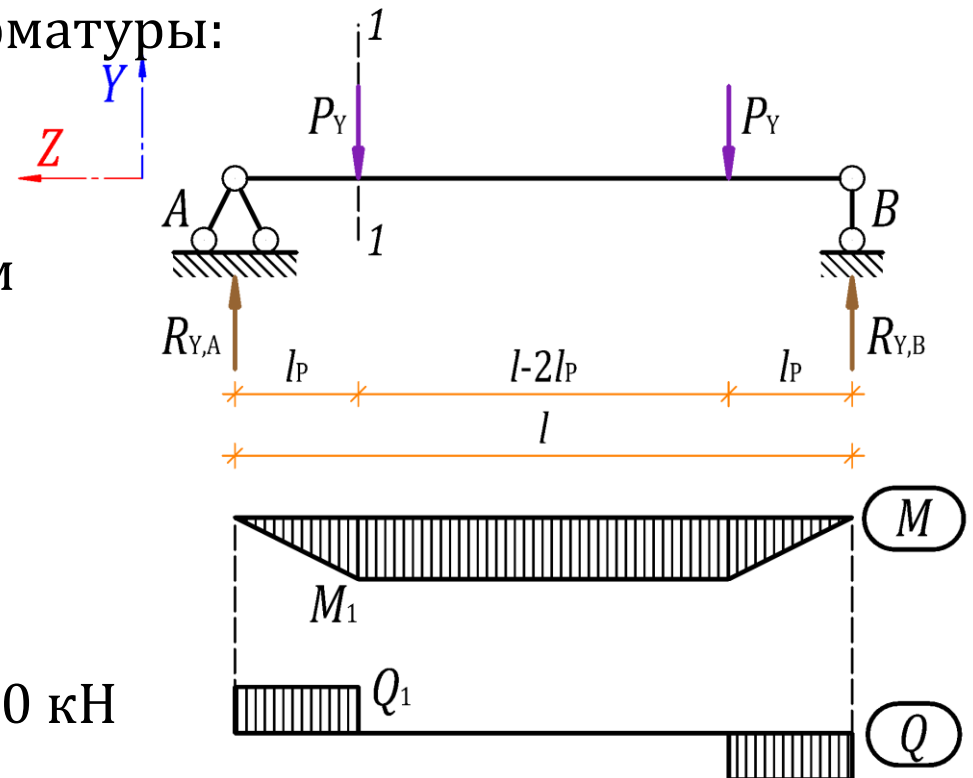
$A_s = 1140$ мм² (3Ø22 мм) и $A'_s = 226$ мм² (2Ø12 мм)

Определим расчетные (нормативные) значения внутренних усилий M_1 ($M_{1,ser}$) и Q_1 ($Q_{1,ser}$) методом сечений:

$$M_1 = R_{Y,A} \cdot l_p = 200 \cdot 1 = 200 \text{ кНм}$$

$$M_{1,ser} = \frac{M_1}{\gamma_{f,red}} = \frac{200}{1,25} = 160 \text{ кНм}$$

$$Q_1 = R_{Y,A} = P_Y = 200 \text{ кН} \quad \text{и} \quad Q_{1,ser} = Q_1 / \gamma_{f,red} = 160 \text{ кН}$$



Пример 1. Геометрические характеристики сечения

Определим площадь приведенного поперечного сечения элемента:

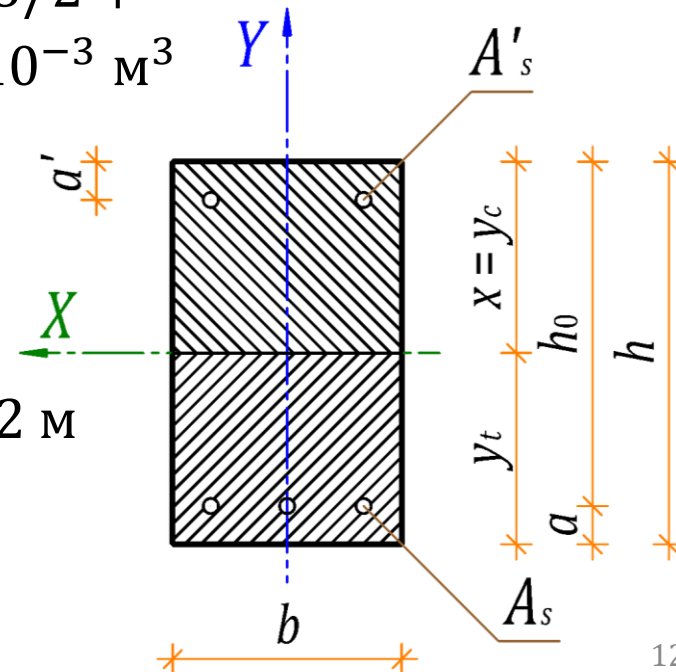
$$A_{red} = A + \alpha A_s + \alpha A'_s = 0,3 \cdot 0,5 + 6,7 \cdot (1140 + 226) \cdot 10^{-6} = 159,2 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2$$

Определим статический момент площади приведенного поперечного сечения элемента относительно наиболее растянутого волокна бетона:

$$S_{x,t,red} = Ah/2 + \alpha A_s a + \alpha A'_s (h - a') = 0,3 \cdot 0,5 \cdot 0,5/2 + 6,7 \cdot (1140 \cdot 50 + 226 \cdot (500 - 50)) \cdot 10^{-9} = 38,6 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3$$

Расстояние от наиболее растянутого волокна бетона до центра тяжести приведенного поперечного сечения элемента:

$$y_t = \frac{S_{x,t,red}}{A_{red}} = \frac{Ah/2 + \alpha A_s a + \alpha A'_s (h - a')}{A + \alpha A_s + \alpha A'_s} = \frac{38,6 \cdot 10^{-3}}{159,2 \cdot 10^{-3}} = 0,242 \text{ м}$$



Пример 1. Геометрические характеристики сечения

Определим момент инерции приведенного сечения элемента относительно его центра тяжести:

$$I_{x,red} = I_x + \alpha I_{x,s} + \alpha I'_{x,s} = (3125 + 6,7 \cdot (42 + 10)) \cdot 10^{-6} = 3473 \cdot 10^{-6} \text{ м}^4$$

где $I_x = \frac{bh^3}{12} = \frac{0,3 \cdot 0,5^3}{12} = 3125 \cdot 10^{-6} \text{ м}^4$

$$I_{x,s} = A_s (y_t - a)^2 = 1140 \cdot (242 - 50)^2 \cdot 10^{-12} = 42 \cdot 10^{-6} \text{ м}^4$$

$$I'_{x,s} = A'_s (y_c - a')^2 = 226 \cdot (500 - 242 - 50)^2 \cdot 10^{-12} = 10 \cdot 10^{-6} \text{ м}^4$$

Определим упругий момент сопротивления приведенного сечения для крайнего растянутого волокна бетона:

$$W_{x,t,red} = \frac{I_{x,red}}{y_t} = \frac{3473 \cdot 10^{-6}}{0,242} = 14,4 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3$$

Пример 1. Расчет по образованию трещин

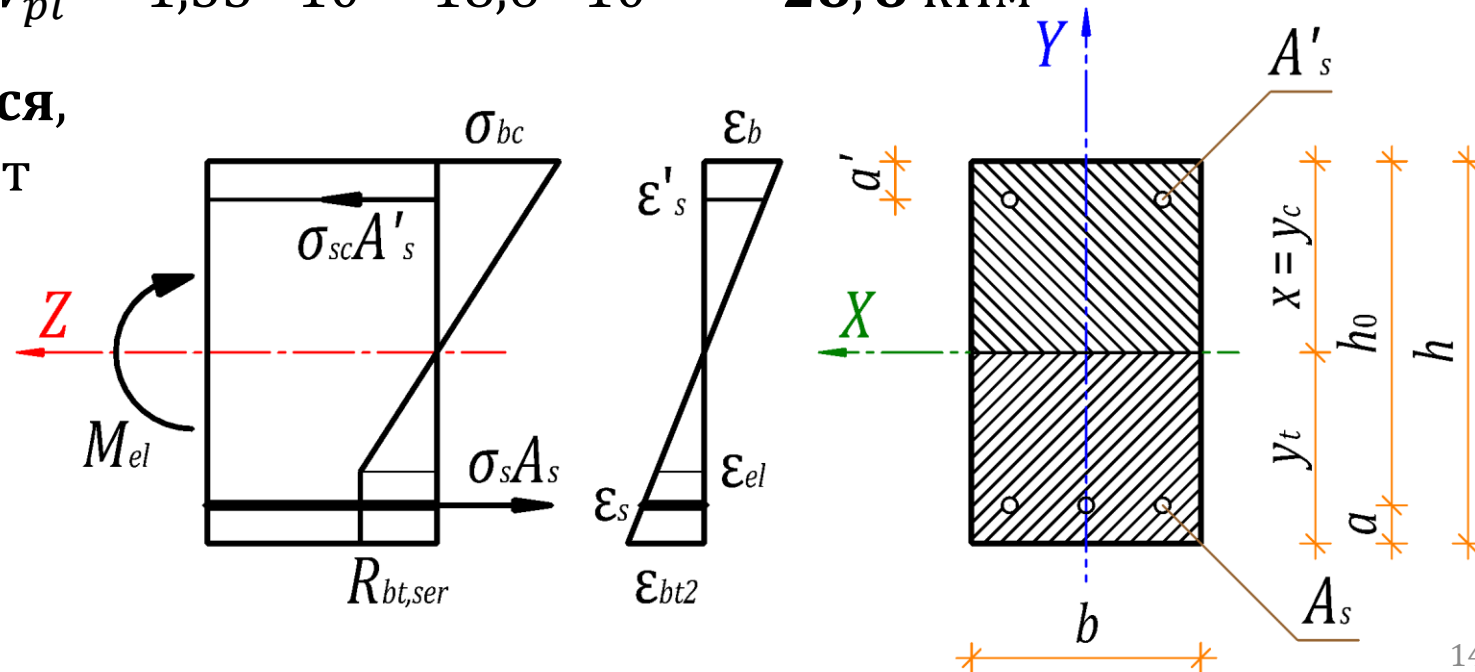
Определим упругопластический момент сопротивления сечения для крайнего растянутого волокна бетона:

$$W_{pl} = 1,3W_{x,t,red} = 1,3 \cdot 14,4 \cdot 10^{-3} = 18,6 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3$$

Проверим выполнение условия образования трещин:

$$M_{el} = \mathbf{160} \text{ кНм} > M_{crc} = R_{bt,ser} \cdot W_{pl} = 1,55 \cdot 10^3 \cdot 18,6 \cdot 10^{-3} = \mathbf{28,8} \text{ кНм}$$

Нормальные трещины **образуются**, поскольку изгибающий момент от внешней нагрузки превышает упругопластический момент сопротивления сечения для крайнего растянутого волокна бетона



Расчет по образованию трещин (п. 8.2.4, 8.2.11 СП 63)

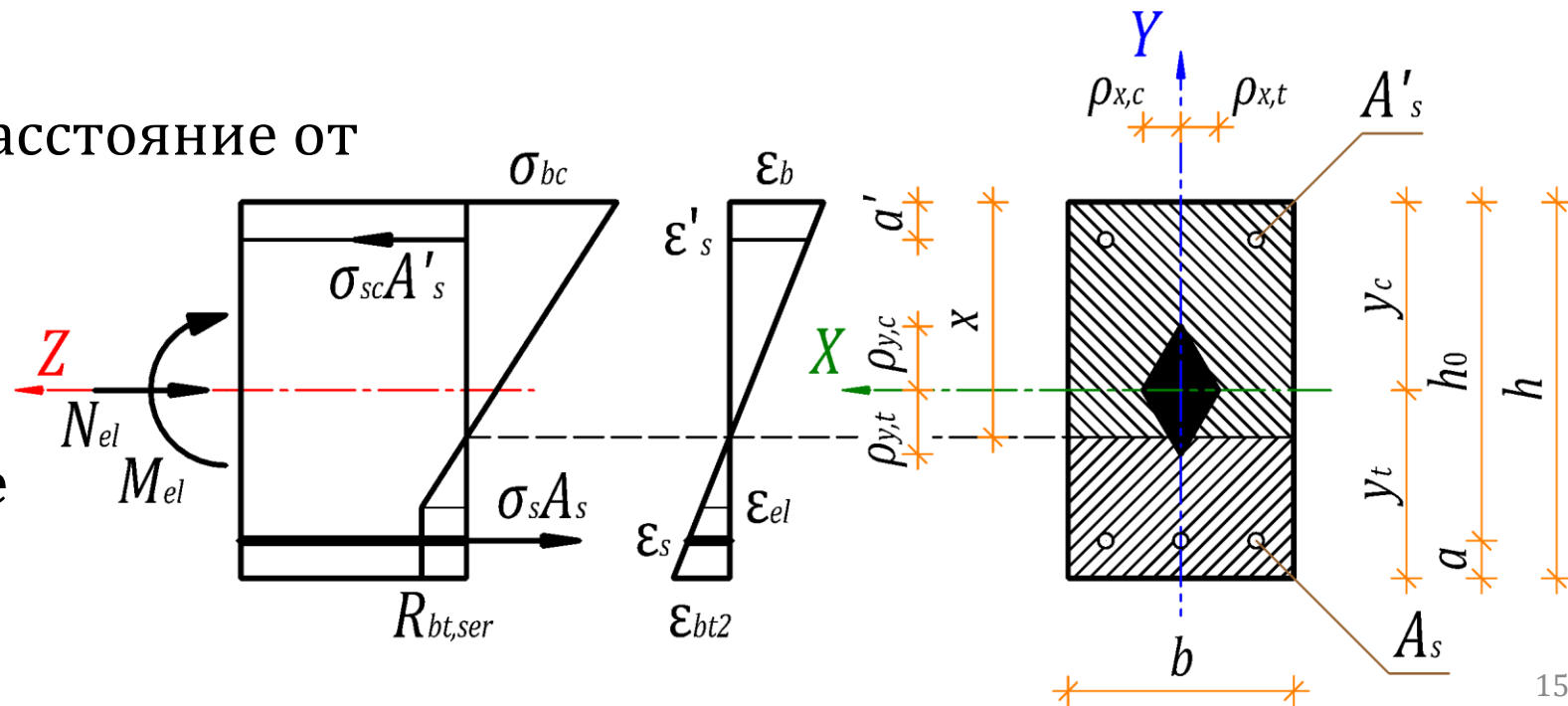
Внецентренно нагруженных элементов простого сечения выполняется по формуле:

$$M_{el} \geq M_{crc} = R_{bt,ser} \cdot W_{pl} \pm N_{el} \cdot \rho_{y,c}$$

где N_{el} – продольная сила от внешней нагрузки, расположенная в центре тяжести приведенного поперечного сечения элемента (знак «+» для сжатия)

$$\rho_{y,c} = \frac{I_{x,red}}{A_{red} y_t} = \frac{W_{x,t,red}}{A_{red}} \text{ — расстояние от}$$

центра тяжести сечения до ядровой точки, наиболее удаленной от растянутой зоны, трещинообразование которой проверяется



Расчет по раскрытию трещин (п. 8.2.5, 8.2.6 СП 63)

С учетом продолжительности действия нагрузки производят из условия:

$$a_{crc} \leq a_{crc,ult}$$

где a_{crc} – ширина раскрытия трещин от действия внешней нагрузки

$a_{crc,ult}$ – предельно допустимая ширина раскрытия трещин

Непродолжительное раскрытие трещин определяют от совместного действия постоянных и временных (длительных и кратковременных) нагрузок, продолжительное – только от постоянных и временных длительных нагрузок

Значения $a_{crc,ult}$ для классов А240...А600, В500 принимают равными:

- 0,3 и 0,4 мм – из условия обеспечения сохранности арматуры при продолжительном и непродолжительном раскрытии соответственно
- 0,2 и 0,3 мм – из условия ограничения проницаемости конструкций при продолжительном и непродолжительном раскрытии соответственно

Ширина раскрытия трещин a_{crc}

Нормальных к продольной оси элемента, равна разности удлинений арматуры и растянутого бетона на участке между трещинами длиной l_s :

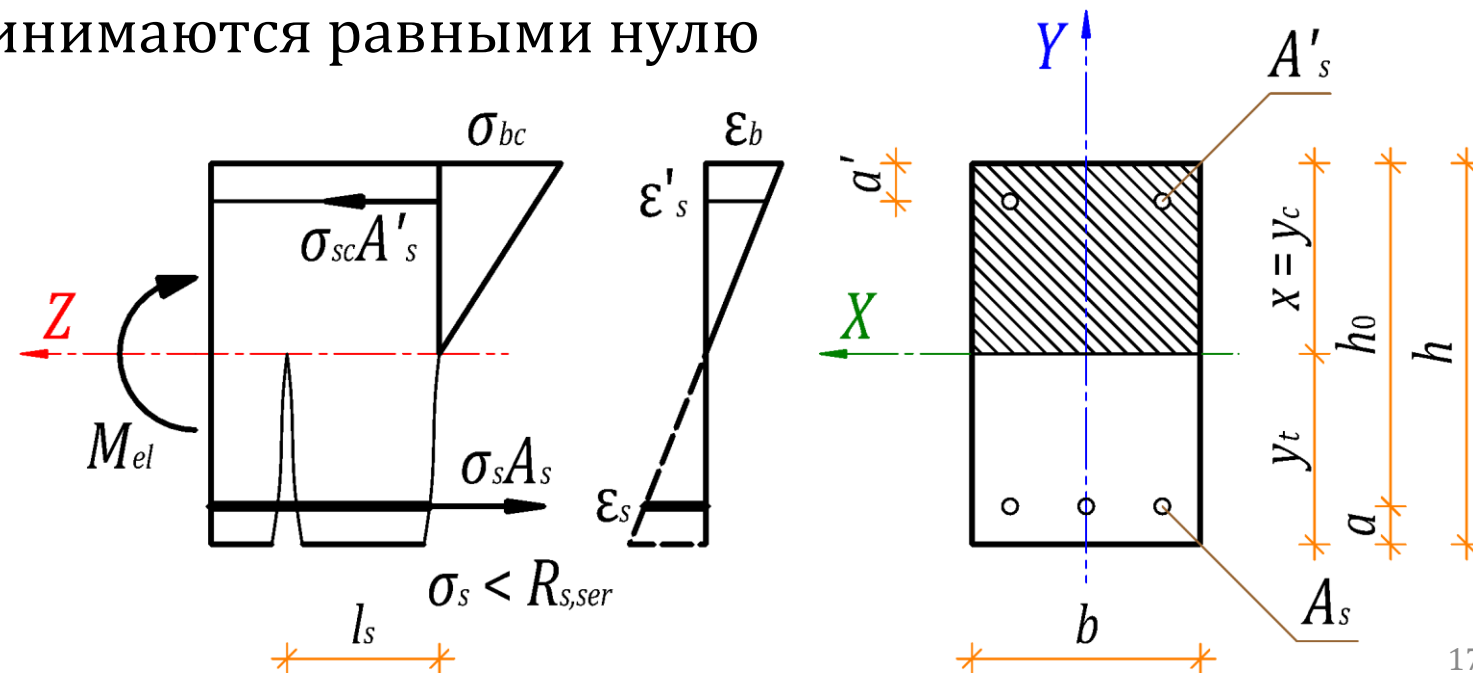
$$a_{crc} = \varepsilon_{sm} \cdot l_s - \varepsilon_{btm} \cdot l_s \rightarrow a_{crc} = \varepsilon_{sm} \cdot l_s$$

где ε_{sm} – средние деформации растянутой арматуры

$\varepsilon_{btm} \cong 0$ – средние деформации растянутого бетона на участке между трещинами в силу малости принимаются равными нулю

l_s – базовое расстояние между смежными нормальными трещинами

a_{crc} – ширина раскрытия трещин от действия внешней нагрузки



Ширина раскрытия трещин a_{crc}

Вводя обозначение ψ_s , равное отношению средних деформаций растянутой арматуры ε_{sm} на участке l_s к деформациям арматуры в сечении с трещиной ε_s :

$$\psi_s = \frac{\varepsilon_{sm}}{\varepsilon_s} \leq 1 \rightarrow \varepsilon_{sm} = \psi_s \cdot \varepsilon_s,$$

предыдущее выражение $a_{crc} = \varepsilon_{sm} \cdot l_s$ можно записать в виде:

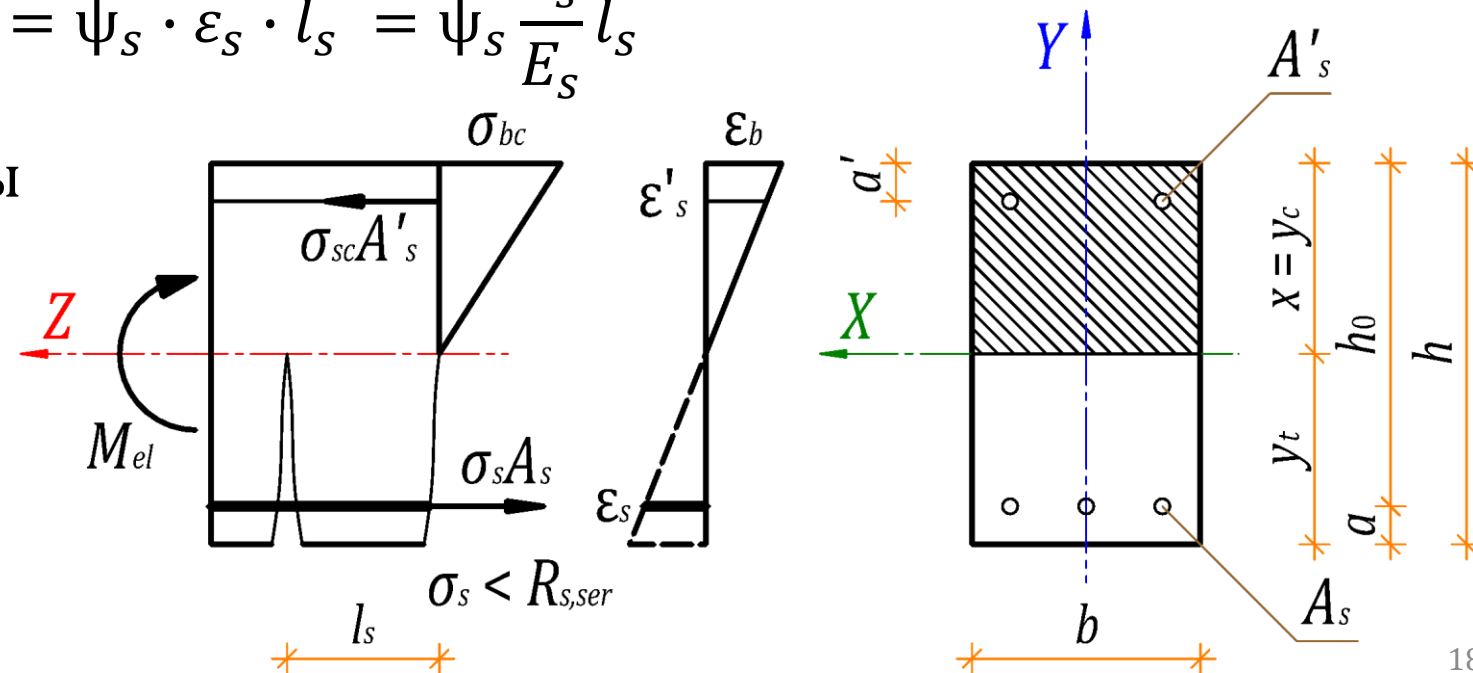
$$a_{crc} = \psi_s \cdot \varepsilon_s \cdot l_s = \psi_s \frac{\sigma_s}{E_s} l_s$$

$\varepsilon_s = \frac{\sigma_s}{E_s}$ – деформации арматуры

в сечении с трещиной

σ_s – напряжение в арматуре

E_s – модуль упругости арматуры



Ширина раскрытия трещин (п. 8.2.7 СП 63)

С учетом **продолжительного** действия нагрузки определяется по формуле:

$$a_{crc} = a_{crc1}$$

С учетом **непродолжительного** действия нагрузки определяется по формуле:

$$a_{crc} = a_{crc1} + a_{crc2} - a_{crc3}$$

где a_{crc1} – ширина раскрытия трещин от **продолжительного** действия постоянных и временных длительных нагрузок

a_{crc2} – ширина раскрытия трещин от **непродолжительного** действия постоянных и временных (длительных и кратковременных) нагрузок

a_{crc3} – ширина раскрытия трещин от **непродолжительного** действия постоянных и временных длительных нагрузок

Расчет ширины раскрытия трещин (п. 8.2.15 СП 63)

Нормальных к продольной оси элемента выполняется по формуле:

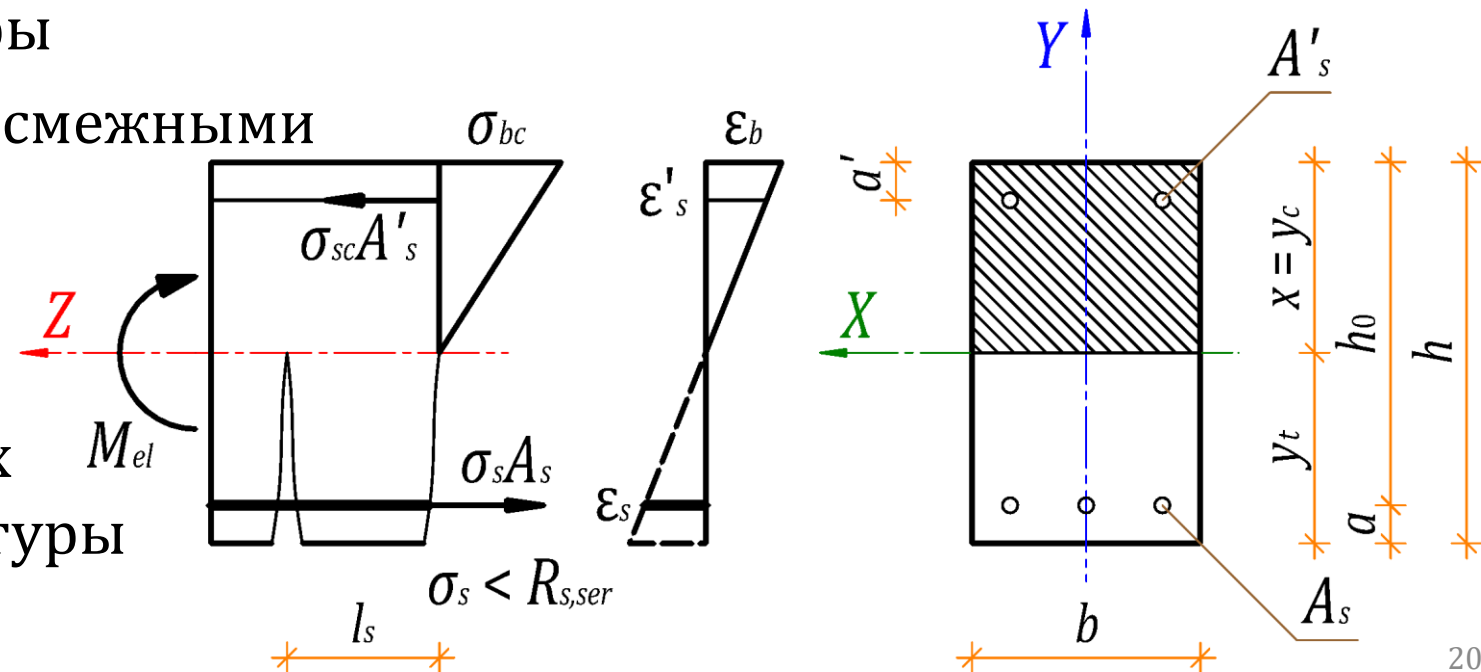
$$a_{crc(1,2,3)} = \varphi_1 \cdot \varphi_2 \cdot \varphi_3 \cdot \psi_s \frac{\sigma_s}{E_s} l_s$$

где σ_s – напряжение в продольной растянутой арматуре в нормальном сечении с трещиной от соответствующей внешней нагрузки

E_s – модуль упругости арматуры

l_s – базовое расстояние между смежными нормальными трещинами

ψ_s – коэффициент, учитывающий неравномерное распределение относительных деформаций растянутой арматуры между трещинами



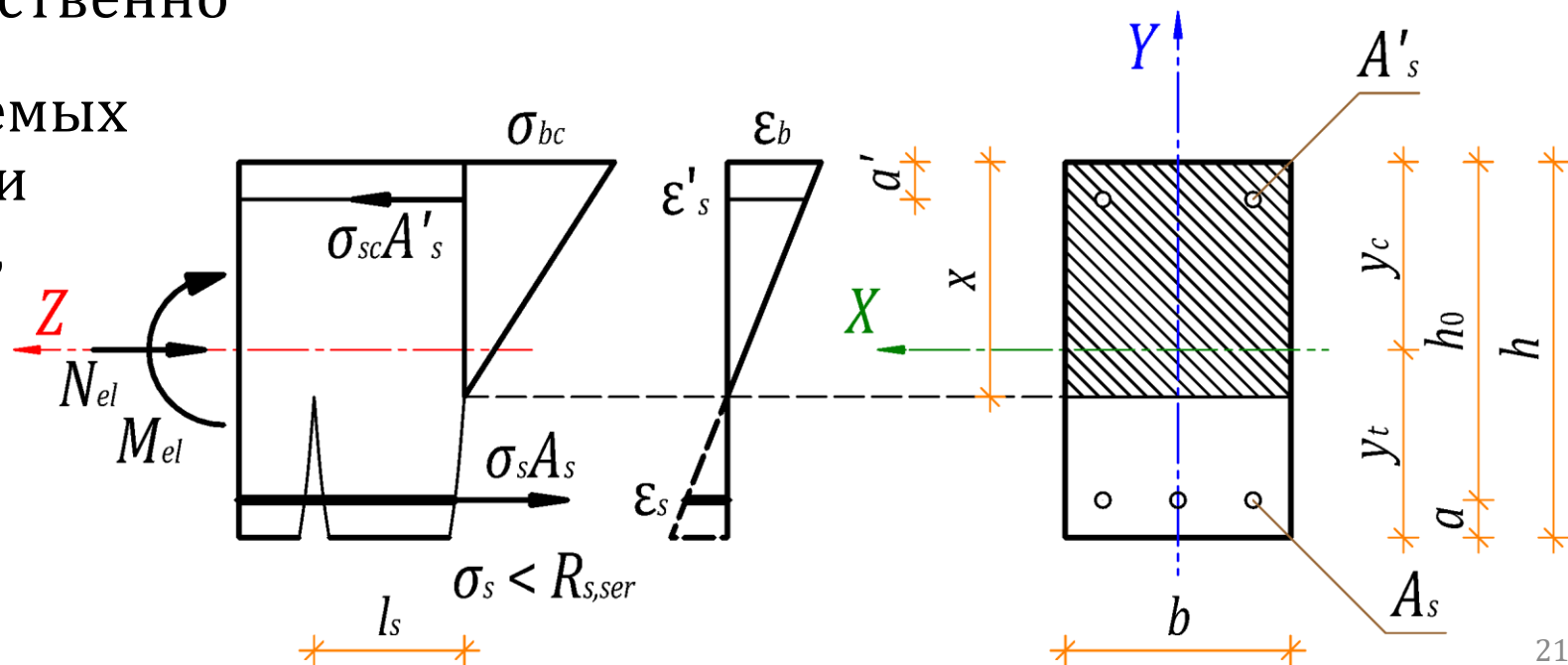
Коэффициенты $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ (п. 8.2.15 СП 63)

Учитывают продолжительность действия нагрузки, профиль продольной арматуры и характер нагружения, соответственно, и принимаются равными:

$\varphi_1 = 1,0$ и $1,4$ – при непродолжительном и продолжительном действии нагрузки, соответственно

$\varphi_2 = 0,5$ и $0,8$ – для арматуры периодического профиля или канатной и для гладкой арматуры, соответственно

$\varphi_3 = 1,0$ и $1,2$ – для изгибаемых или внецентренно сжатых и для растянутых элементов, соответственно



Напряжения в растянутой арматуре (п. 8.2.16 СП 63)

Изгибаемых элементов в нормальных к продольной оси сечениях определяются по формуле:

$$\sigma_s = \frac{M(h_0 - y_c)}{I_{x,red}} \alpha_{s1} \leq R_{s,ser}$$

где M – изгибающий момент от соответствующей внешней нагрузки

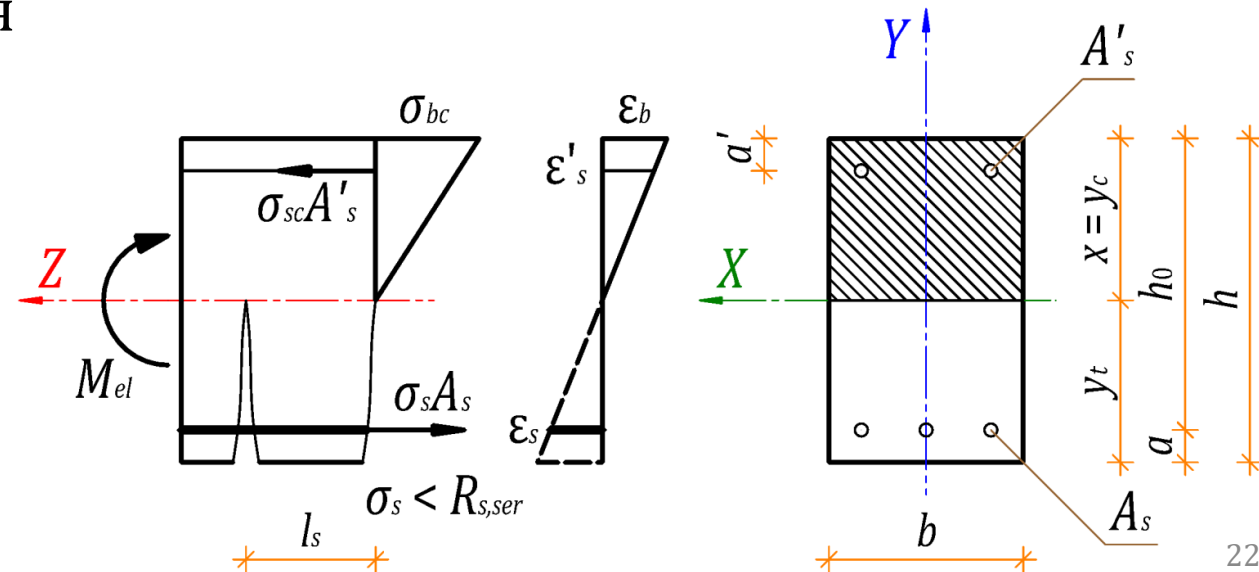
$I_{x,red}$ и y_c – момент инерции и высота сжатой зоны сечения с учетом трещины

$\alpha_{s1} = \frac{E_s}{E_{b,red}}$ – коэффициент приведения

$E_{b,red} = \frac{R_{b,ser}}{\varepsilon_{b1,red}}$ – приведенный

модуль деформации сжатого бетона

$\varepsilon_{b1,red} = 0,0015$ – относительная приведенная деформация бетона



Напряжения в растянутой арматуре (п. 8.2.16 СП 63)

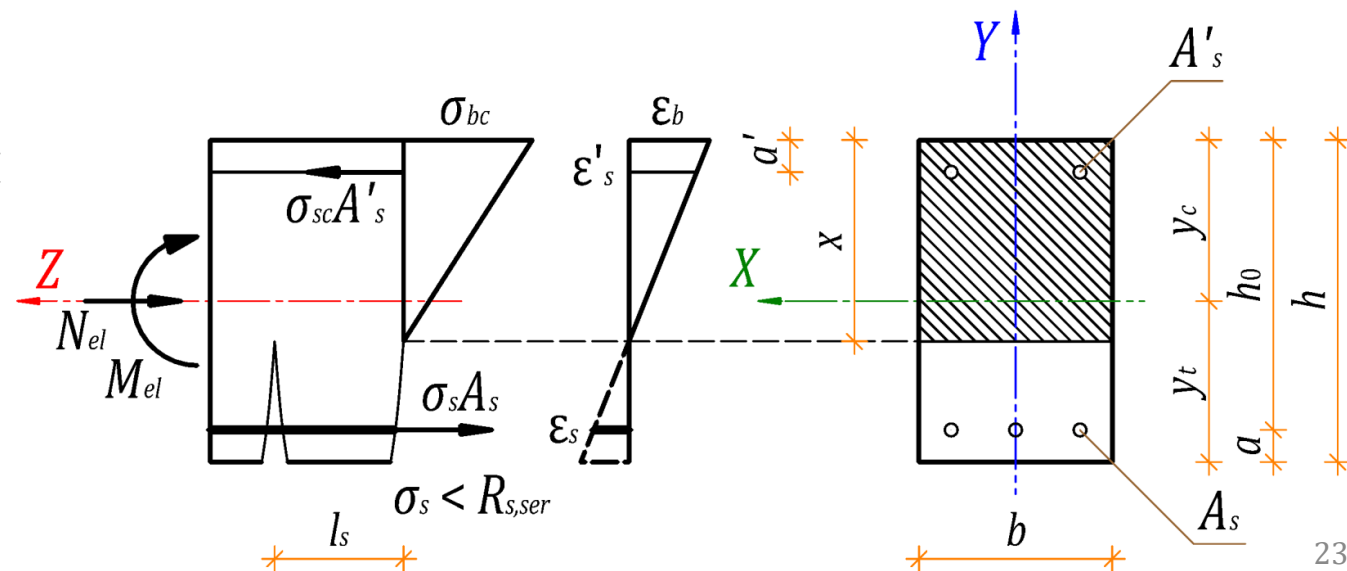
Внецентренно нагруженных элементов в нормальных к продольной оси сечениях определяются по формуле:

$$\sigma_s = \left(\frac{M(h_0 - y_c)}{I_{x,red}} \pm \frac{N}{A_{red}} \right) \alpha_{s1} \leq R_{s,ser}$$

где M и N – внутренние усилия от соответствующей внешней нагрузки

$I_{x,red}$, A_{red} и y_c – момент инерции, площадь и высота сжатой зоны сечения с учетом трещины

« \pm » – знак "плюс" принимают при растягивающей, а знак "минус" при сжимающей продольной силе



Геометрические характеристики (п. 8.2.27 СП 63)

Площадь приведенного поперечного сечения элемента с трещиной определяется по формуле:

$$A_{red} = A_b + \alpha_{s2}A_s + \alpha_{s1}A'_s$$

где A_s , A'_s и $A_b = bx$ – площадь сечений растянутой и сжатых арматуры и бетона

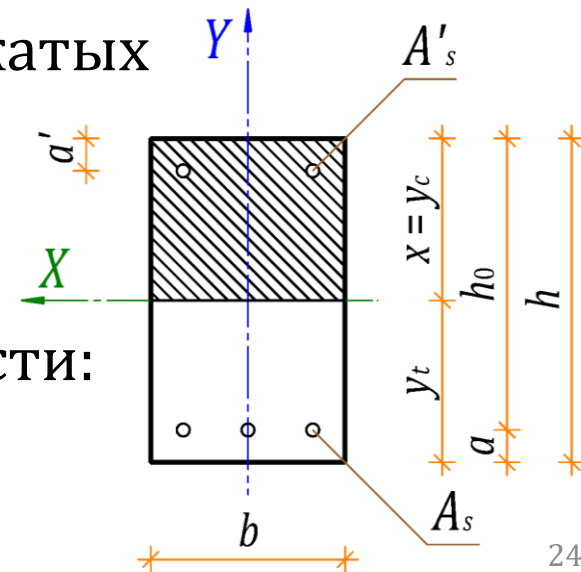
Момент инерции приведенного поперечного сечения элемента с трещиной определяется по формуле:

$$I_{x,red} = I_{x,b} + \alpha_{s2}I_{x,s} + \alpha_{s1}I'_{x,s}$$

где $I_{x,s}$, $I'_{x,s}$ и $I_{x,b}$ – моменты инерции сечений растянутой и сжатых арматуры и бетона, соответственно

Высоту сжатой зоны бетона в изгибаемых элементах определяют на основе равенства нулю статического момента поперечного сечения с трещиной относительно центра тяжести:

$$S_{x,b0} + \alpha_{s1}S'_{x,s0} = \alpha_{s2}S_{x,s0}$$



Высота сжатой зоны бетона (п. 8.2.28 СП 63)

В изгибаемых элементах находится на основе решения квадратного уравнения относительно x :

$$bx^2 + 2(\alpha_{s1}A'_s + \alpha_{s2}A_s)x - 2(\alpha_{s1}A'_sa' + \alpha_{s2}A_sh_0) = 0$$

$$x = \frac{\sqrt{(\alpha_{s1}A'_s + \alpha_{s2}A_s)^2 + 2b(\alpha_{s1}A'_sa' + \alpha_{s2}A_sh_0)} - (\alpha_{s1}A'_s + \alpha_{s2}A_s)}{b}$$

$$x = h_0 \left[\sqrt{(\alpha_{s1}\mu'_s + \alpha_{s2}\mu_s)^2 + 2(\alpha_{s1}\mu'_s \frac{a'}{h_0} + \alpha_{s2}\mu_s)} - (\alpha_{s1}\mu'_s + \alpha_{s2}\mu_s) \right]$$

Высота сжатой зоны бетона в изгибаемых элементах таврового сечения:

$$x = h_0 \left[\sqrt{(\alpha_{s1}\mu'_s + \alpha_{s2}\mu_s + \mu'_f)^2 + 2 \left(\alpha_{s1}\mu'_s \frac{a'}{h_0} + \alpha_{s2}\mu_s + \mu'_f \frac{h'_f}{2h_0} \right)} - (\alpha_{s1}\mu'_s + \alpha_{s2}\mu_s + \mu'_f) \right]$$

где $\mu_s = A_s/(bh_0)$ и $\mu'_s = A'_s/(bh_0)$ – проценты армирования
 $\mu'_f = A'_f/(bh_0)$, A'_f – площадь сечения свесов сжатой полки

Моменты инерции сжатой зоны бетона (п. 8.2.27 СП 63)

В прямоугольных и тавровых сечениях с трещиной в изгибаемых элементах определяются по следующим формулам:

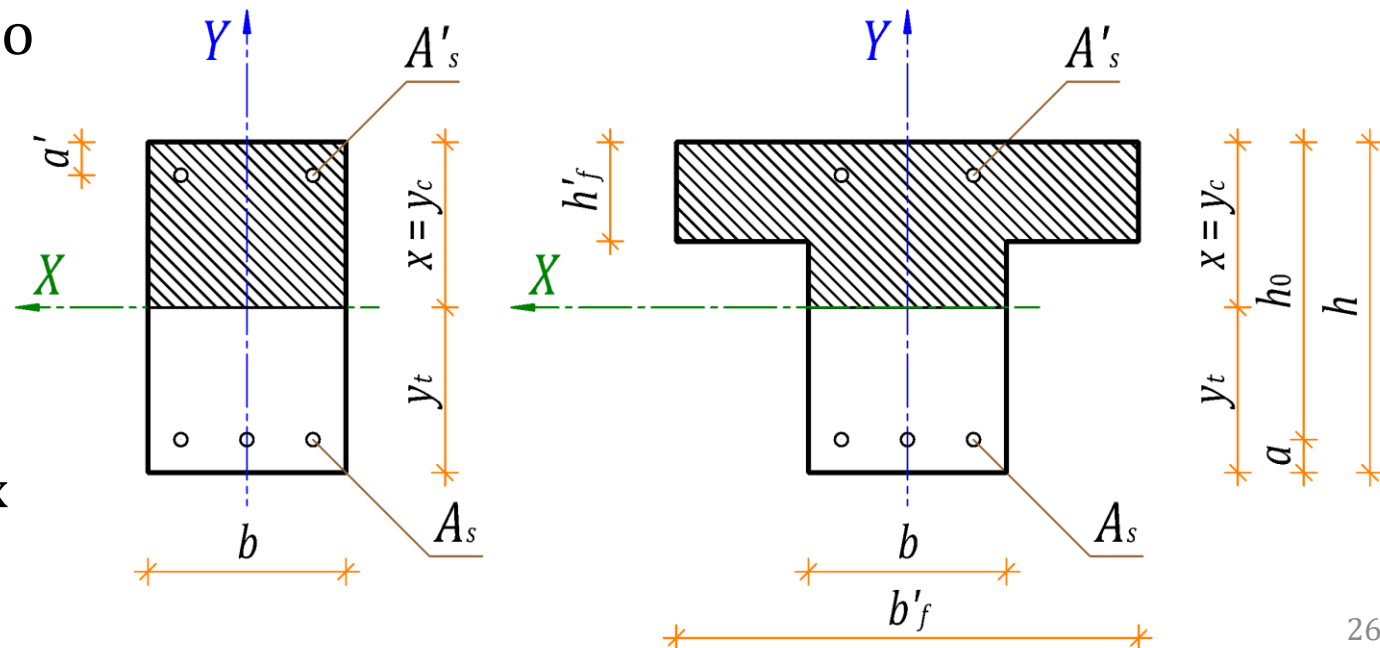
$$I_{x,b} = \frac{bx^3}{12} + \frac{bx^3}{4} = \frac{bx^3}{3} \quad \text{и} \quad I_{x,b} = \frac{bx^3}{3} + \frac{(b'_f - b)h_f'^3}{12} + (b'_f - b)h'_f \left(x - \frac{h'_f}{2}\right)^2$$

Моменты инерции растянутой и сжатой арматуры определяются по формулам:

$$I_{x,s} = A_s(h_0 - x)^2$$

$$I'_{x,s} = A'_s(x - a')^2$$

Моменты инерции арматуры относительно собственных центральных осей пренебрегают в силу их малости



Коэффициент ψ_s (п. 8.2.18 СП 63)

Учитывает работу растянутого бетона между трещинами и определяется по формуле:

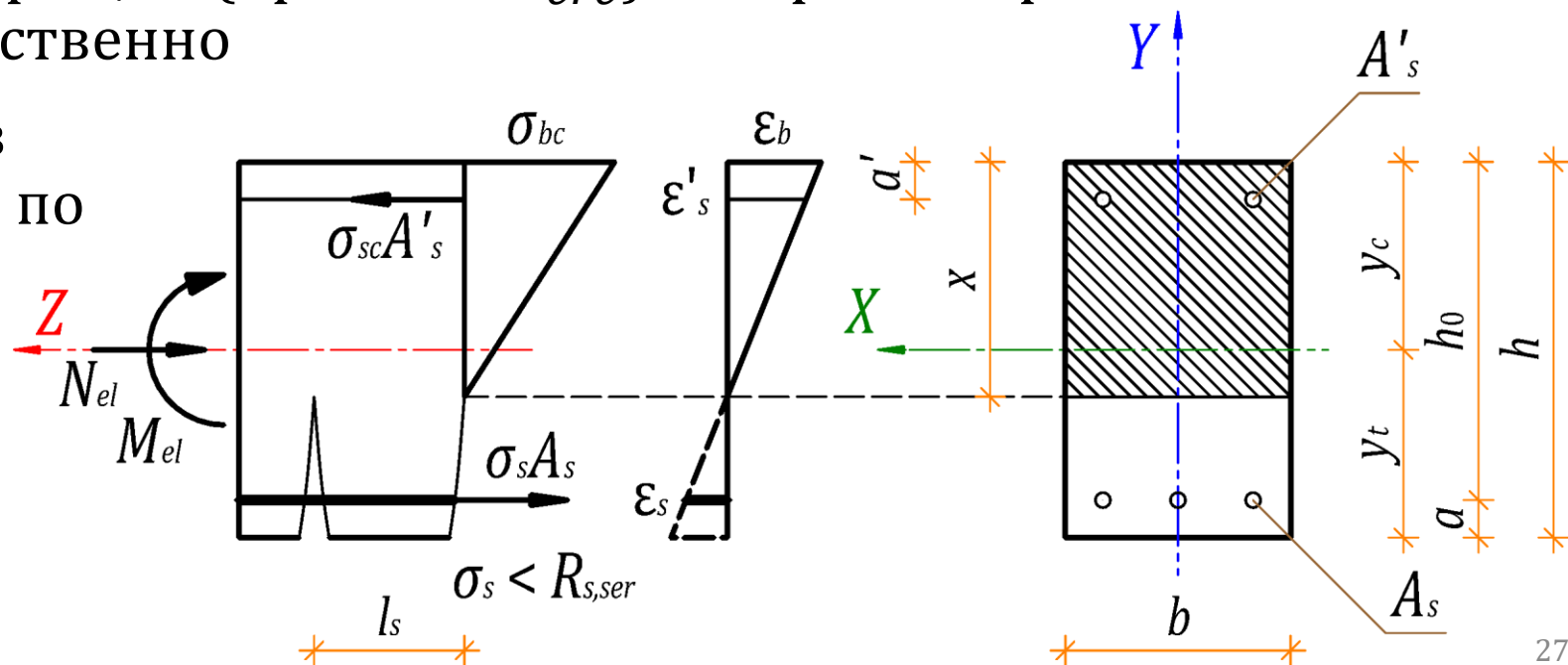
$$\psi_s = 1 - 0,8 \frac{\sigma_{s,crc}}{\sigma_s} \leq 1 \quad \text{и} \quad \psi_{s,l} = 1 - 0,8 \frac{\sigma_{s,crc}}{\sigma_{s,l}} \leq 1$$

где $\sigma_{s,crc}$ и σ_s – напряжения в продольной растянутой арматуре сразу после образования нормальных трещин (при $M = M_{crc}$) и от рассматриваемой внешней нагрузки, соответственно

Для изгибаемых элементов допускается ψ_s определять по формуле:

$$\psi_s = 1 - 0,8 \frac{M_{crc}}{M_{ser}} \leq 1$$

$$\psi_{s,l} = 1 - 0,8 \frac{M_{crc}}{M_{ser,l}} \leq 1$$



Коэффициенты приведения α_{s1} и α_{s2} (п. 8.2.30 СП 63)

Арматуры к бетону определяются по следующим формулам:

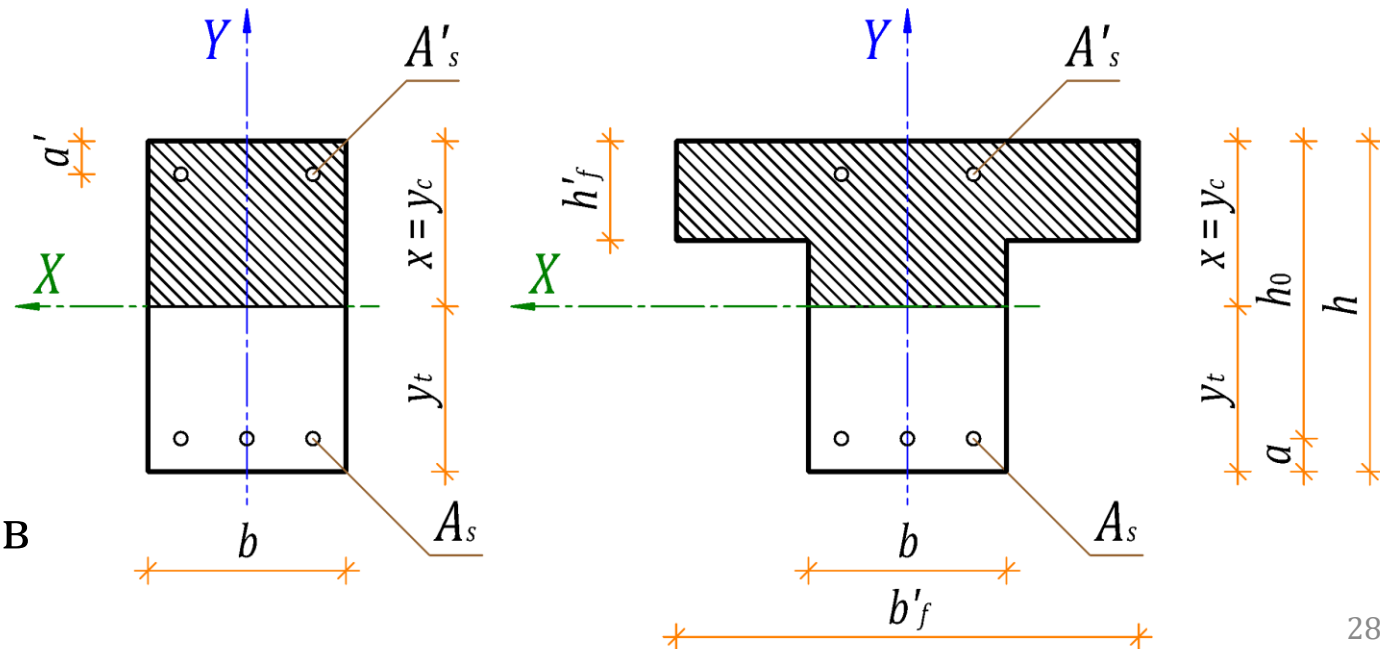
$$\alpha_{s1} = \frac{E_s}{E_{b,red}} - \text{для сжатой} \quad \text{и} \quad \alpha_{s2} = \frac{E_{s,red}}{E_{b,red}} - \text{для растянутой}$$

$E_{b,red} = \frac{R_{b,ser}}{\varepsilon_{b1,red}}$ – приведенный
модуль деформации сжатого бетона

$\varepsilon_{b1,red} = 0,0015$ – относительная
приведенная деформация бетона

$E_{s,red} = \frac{E_s}{\psi_s}$ – приведенный модуль
деформации растянутой арматуры с
учетом влияния работы растянутого
бетона между трещинами

$\alpha_{s2} = \alpha_{s1}$ – для изгибаемых элементов



Пример 2. Расчет балки по раскрытию трещин

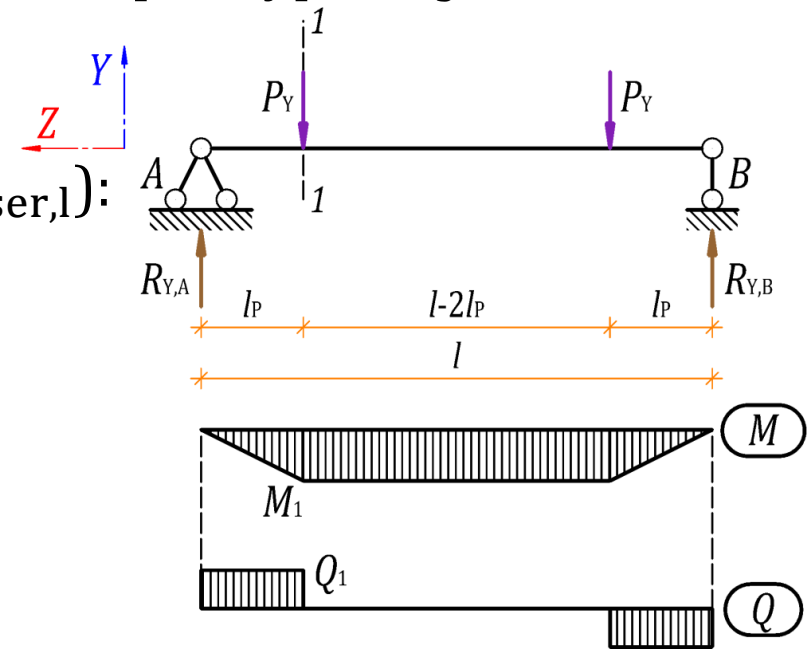
Дано: монолитная железобетонная балка из Примера 1, сечением $b \times h - 300 \times 500$ мм пролетом $l = 3,0$ м, $a = a' = 50$ мм, бетон класса В25 ($E_b = 30000$ МПа, $R_{b,ser} = 18,5$ МПа, $R_{bt,ser} = 1,55$ МПа), арматура класса А500 ($E_s = 200000$ МПа, $R_s = 435$ МПа, $R_{sc} = 400(435)$ МПа), полная нагрузка $P_Y = 200$ кН, в том числе постоянная и длительная нагрузка $P_{Yl} = 160$ кН, приложенная на расстоянии $l_p = 1,0$ м от опор, шарнирные узлы сопряжения, осредненный $\gamma_{f,red} = 1,25$, площадь продольной арматуры: $A_s = 1140$ мм² (3Ø22 мм) и $A'_s = 226$ мм² (2Ø12 мм)

Определим непродолжительные (продолжительные) нормативные значения изгибающих моментов $M_{1,ser}$ ($M_{1,ser,l}$):

$$M_1 = R_{Y,A} \cdot l_p = 200 \cdot 1 = 200 \text{ кНм}$$

$$M_{1,ser} = \frac{M_1}{\gamma_{f,red}} = \frac{200}{1,25} = 160 \text{ кНм}$$

$$M_{1,ser,l} = M_{1,ser} \frac{P_{Yl}}{P_Y} = 160 \cdot \frac{160}{200} = 128 \text{ кНм}$$



Пример 2. Высота сжатой зоны бетона

Определим высоту сжатой зоны бетона с учетом трещины:

$$x = h_0 \left[\sqrt{(\alpha_{s1}\mu'_s + \alpha_{s2}\mu_s)^2 + 2(\alpha_{s1}\mu'_s \frac{a'}{h_0} + \alpha_{s2}\mu_s) - (\alpha_{s1}\mu'_s + \alpha_{s2}\mu_s)} \right] =$$

$$= 0,45 \cdot \left[\sqrt{16,2^2 \cdot (0,0084 + 0,0017)^2 + 2 \cdot 16,2 \cdot \left(0,0017 \cdot \frac{0,05}{0,45} + 0,0084 \right) - 16,2 \cdot (0,0084 + 0,0017)} \right] = 0,175 \text{ м}$$

где $\alpha_{s1} = \alpha_{s2} = \frac{E_s}{E_{b,red}} = \frac{E_s \varepsilon_{b1,red}}{R_{b,ser}} = \frac{200000 \cdot 0,0015}{18,5} = 16,2$ – коэффициенты приведения

$\mu_s = \frac{A_s}{bh_0} = \frac{1140}{300 \cdot 450} = 0,0084$ и $\mu'_s = \frac{A'_s}{bh_0} = \frac{226}{300 \cdot 450} = 0,0017$ – проценты армирования

Пример 2. Моменты инерции и коэффициент ψ_s

Определим момент инерции приведенного сечения элемента с трещиной относительно его центра тяжести:

$$I_{x,red} = I_{x,b} + \alpha_{s2}I_{x,s} + \alpha_{s1}I'_{x,s} = (536 + 16,2 \cdot (86 + 4)) \cdot 10^{-6} = 1994 \cdot 10^{-6} \text{ м}^4$$

$$\text{где } I_{x,b} = \frac{bx^3}{3} = \frac{0,3 \cdot 0,175^3}{3} = 536 \cdot 10^{-6} \text{ м}^4$$

$$I_{x,s} = A_s(h_0 - x)^2 = 1140 \cdot (450 - 175)^2 \cdot 10^{-12} = 86 \cdot 10^{-6} \text{ м}^4$$

$$I'_{x,s} = A'_s(x - a')^2 = 226 \cdot (175 - 50)^2 \cdot 10^{-12} = 4 \cdot 10^{-6} \text{ м}^4$$

Определим коэффициент ψ_s , учитывающий работу бетона между трещинами:

$$\psi_s = 1 - 0,8 \frac{M_{crc}}{M_{ser}} = 1 - 0,8 \cdot \frac{28,9}{160} = 0,86 \leq 1 \quad \text{и} \quad \psi_{s,l} = 1 - 0,8 \cdot \frac{28,9}{128} = 0,82 \leq 1$$

Пример 2. Напряжения в растянутой арматуре и расстояние l_s

Определим напряжения в растянутой арматуре от непродолжительного и продолжительного действия нагрузки:

$$\sigma_s = \frac{M_{ser}(h_0 - y_c)}{I_{x,red}} \alpha_{s1} = \frac{160 \cdot (0,45 - 0,175)}{1994 \cdot 10^{-6} \cdot 10^3} \cdot 16,2 = 357,5 \text{ МПа} \leq R_{s,ser} = 500 \text{ МПа}$$

$$\sigma_{s,l} = \frac{M_{ser,l}(h_0 - y_c)}{I_{x,red}} \alpha_{s1} = \frac{128 \cdot (0,45 - 0,175)}{1994 \cdot 10^{-6} \cdot 10^3} \cdot 16,2 = 286,0 \text{ МПа} \leq R_{s,ser} = 500 \text{ МПа}$$

Определим расстояние между нормальными трещинами:

$$0,1 \text{ м} \leq l_s = 0,5 \frac{A_{bt}}{A_s} d_s = 0,5 \cdot \frac{0,0726}{1140 \cdot 10^{-6}} \cdot 0,022 = 0,7 \text{ м} > 0,4 \text{ м} - \text{принимаем } l_s = 0,4 \text{ м}$$

$$2ab = 2 \cdot 0,05 \cdot 0,3 = 0,03 \text{ м}^2 \leq A_{bt} = by_t = 0,3 \cdot 0,242 = 0,0726 \text{ м}^2 \leq \frac{bh}{2} = \frac{0,3 \cdot 0,5}{2} = 0,075 \text{ м}^2$$

Пример 2. Ширина раскрытия трещин a_{crc}

Определим a_{crc} с учетом **продолжительного** действия нагрузки:

$$a_{crc1} = \varphi_1 \varphi_2 \varphi_3 \psi_{s,l} \frac{\sigma_{s,l}}{E_s} l_s = 1,4 \cdot 0,5 \cdot 1,0 \cdot 0,82 \cdot \frac{286,0}{200000} \cdot 0,4 \cdot 10^3 = \mathbf{0,33} \text{ мм} > \mathbf{0,3} \text{ мм}$$

Определим a_{crc} с учетом **непродолжительного** действия нагрузки:

$$a_{crc2} = \varphi_1 \varphi_2 \varphi_3 \psi_s \frac{\sigma_s}{E_s} l_s = 1,0 \cdot 0,5 \cdot 1,0 \cdot 0,86 \cdot \frac{357,5}{200000} \cdot 0,4 \cdot 10^3 = \mathbf{0,31} \text{ мм}$$

$$a_{crc3} = \varphi_1 \varphi_2 \varphi_3 \psi_{s,l} \frac{\sigma_{s,l}}{E_s} l_s = 1,0 \cdot 0,5 \cdot 1,0 \cdot 0,82 \cdot \frac{286,0}{200000} \cdot 0,4 \cdot 10^3 = \mathbf{0,23} \text{ мм}$$

$$a_{crc} = a_{crc1} + a_{crc2} - a_{crc3} = 0,33 + 0,31 - 0,23 = \mathbf{0,41} \text{ мм} > \mathbf{0,4} \text{ мм}$$

Вывод: требуется **увеличить площадь** продольной растянутой **арматуры**

Расчет по прогибам (п. 8.2.21-8.2.22 СП 63)

С учетом продолжительности действия нагрузки производят из условия:

$$f \leq f_{ult}$$

где f – прогиб железобетонного элемента от действия внешней нагрузки

f_{ult} – предельно допустимый прогиб согласно п. 15 СП 20.13330

Прогибы железобетонных элементов в расчетных моделях определяются различными методами строительной механики с учетом фактических геометрических характеристик поперечных сечений, напряженно-деформированного состояния и механических свойств бетона и арматуры

Кривизна ЖБЭ (п. 8.2.25 СП 63)

От действия соответствующих нагрузок определяется по формуле:

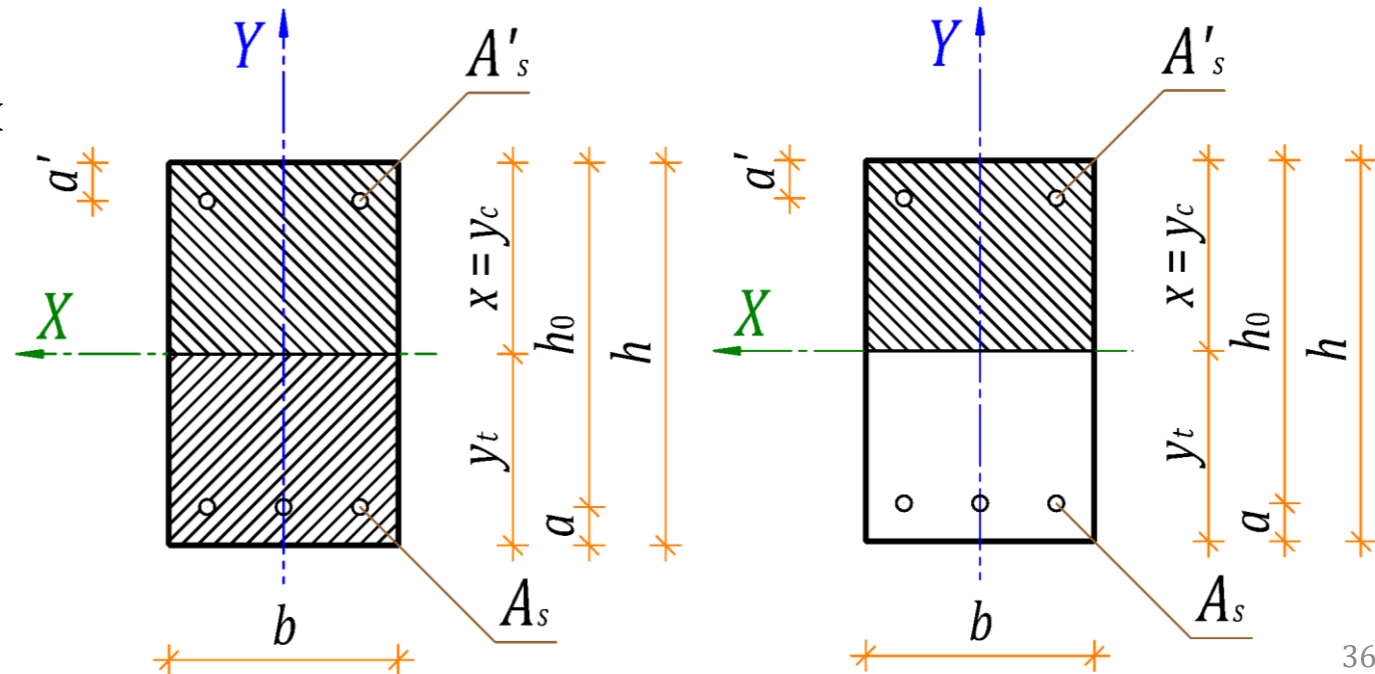
$$\frac{1}{r} = \frac{M}{D}$$

где M – изгибающий момент от соответствующей внешней нагрузки

$D = E_{b1} I_{red}$ – изгибная жесткость приведенного поперечного сечения элемента

E_{b1} – модуль деформации сжатого бетона, определяемый в зависимости от **продолжительности** действия нагрузки и с учетом **наличия** или **отсутствия** трещин

I_{red} – момент инерции приведенного поперечного сечения относительно его центра тяжести, определяемый с учетом **наличия** или **отсутствия** трещин



Кривизной K плоской кривой

В ее точке C называется предел отношения острого угла $\Delta\theta$ (угол смежности) между касательными кривой в точках C и E к длине дуги кривой $\overline{CE} = \Delta s$, когда точка $E \rightarrow C$, т. е.:

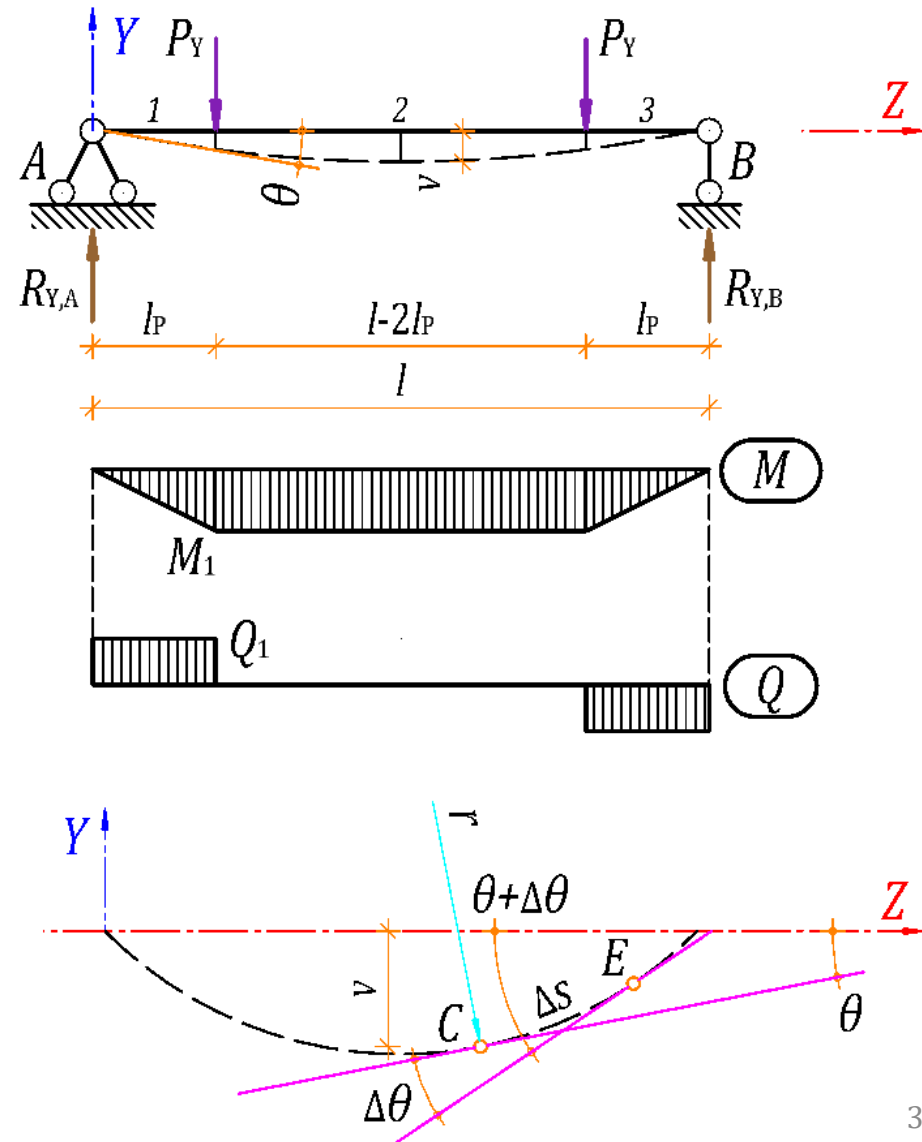
$$|K| = \frac{1}{r} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta s} = \frac{d\theta}{ds} = \frac{v''}{\sqrt{(1 + v'^2)^3}}$$

где θ – острый угол между касательной кривой в точке C и осью Z ; r – радиус кривизны

При малых прогибах принимается, что:

$$\theta \cong \text{tg}\theta = \frac{dy}{dz} = \frac{dv}{dl} = v',$$

$$\text{тогда } v'^2 \rightarrow 0 \text{ и } K = \frac{1}{r} = v'' = \frac{M}{D} = \frac{M}{E \cdot I}$$



Кривизна при чистом изгибе элемента с трещинами

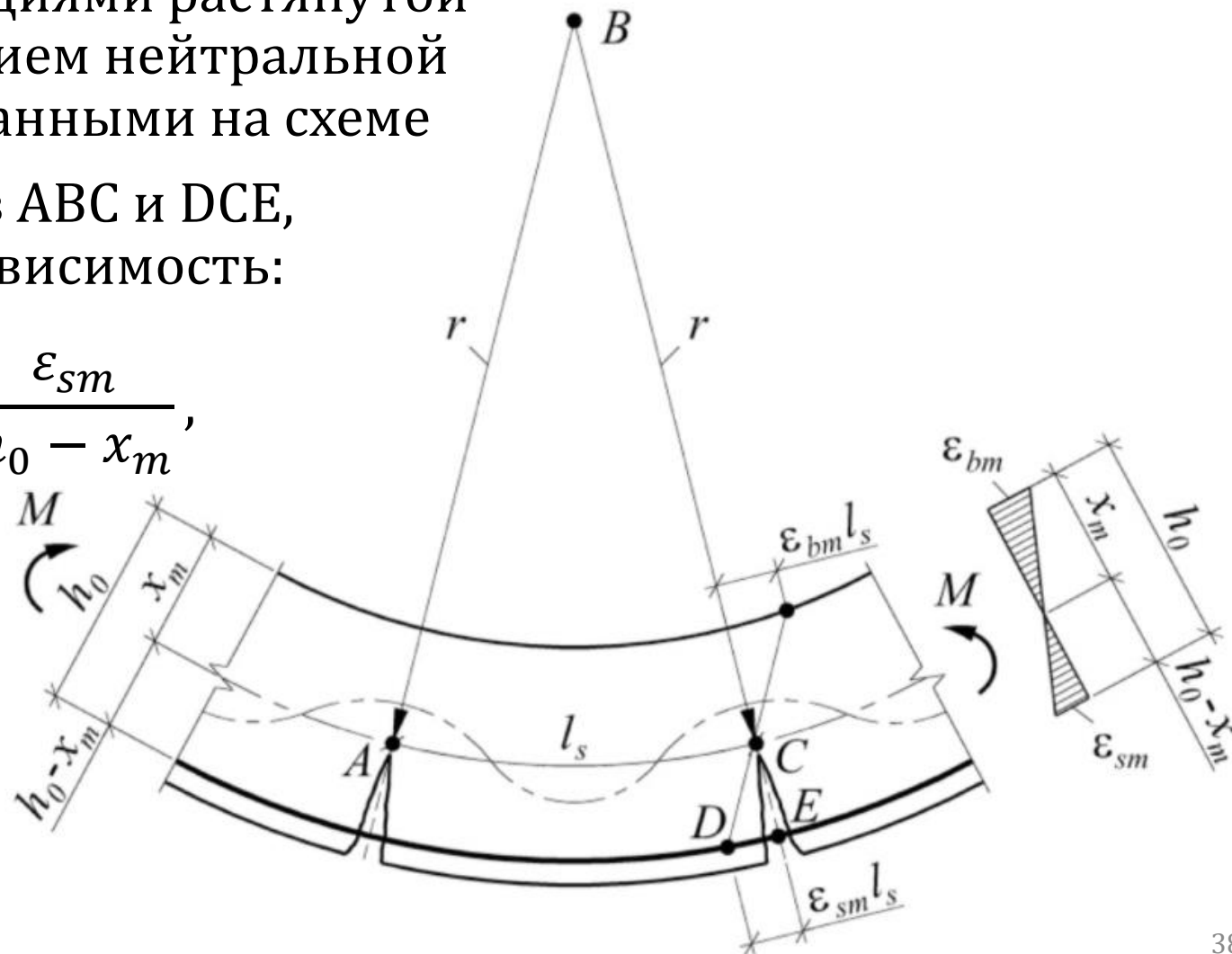
Определяется средними деформациями растянутой арматуры ε_{sm} и средним положением нейтральной оси с радиусом кривизны r , показанными на схеме

На основе подобия треугольников ABC и DCE, показанных на схеме, получена зависимость:

$$\frac{l_s}{r} = \frac{\varepsilon_{sm} \cdot l_s}{h_0 - x_m} \rightarrow \frac{1}{r} = \frac{\varepsilon_{sm}}{h_0 - x_m},$$

которая с учетом $\varepsilon_{sm} = \psi_s \cdot \varepsilon_s$ и $\varepsilon_s = \sigma_s / E_s$ преобразуется в виду:

$$\frac{1}{r} = \frac{\psi_s \cdot \varepsilon_s}{h_0 - x_m} = \frac{\psi_s \cdot \sigma_s}{E_s (h_0 - x_m)}$$



Кривизна при чистом изгибе элемента с трещинами

С учетом равновесия внутренних усилий в сечении элемента:

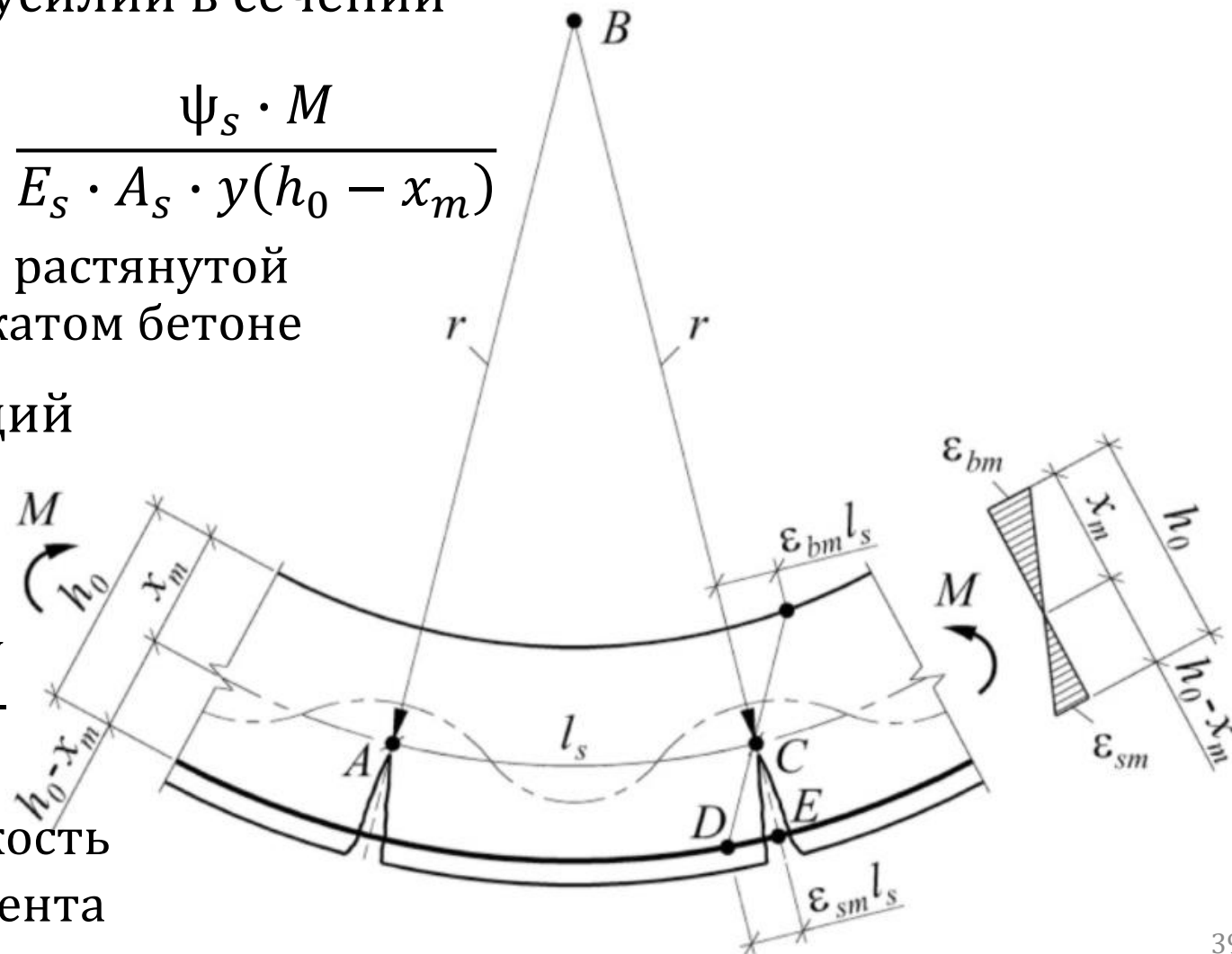
$$\sigma_s = \frac{M}{A_s \cdot y} \rightarrow \frac{1}{r} = \frac{\psi_s \cdot \sigma_s}{E_s(h_0 - x_m)} = \frac{\psi_s \cdot M}{E_s \cdot A_s \cdot y(h_0 - x_m)}$$

где y – расстояние от центра тяжести растянутой арматуры до равнодействующей в сжатом бетоне

И приведенного модуля деформаций растянутой арматуры $E_{s,red} = E_s/\psi_s$ преобразуется в виду:

$$\frac{1}{r} = \frac{M}{E_{s,red} \cdot A_s \cdot y(h_0 - x_m)} = \frac{M}{D}$$

где $D = E_{s,red} \cdot A_s \cdot y(h_0 - x_m)$ – жесткость сечения с трещиной при изгибе элемента



Полная кривизна ЖБЭ (п. 8.2.23, 8.2.24 СП 63)

И прогиб для участков **без трещин** в растянутой зоне:

$$\frac{1}{r} = \left(\frac{1}{r}\right)_1 + \left(\frac{1}{r}\right)_2 \quad \text{и} \quad f = f_1 + f_2$$

$(1/r)_1$ и f_1 , $(1/r)_2$ и f_2 – кривизны и прогибы соответственно от **непродолжительного** действия кратковременных нагрузок и от **продолжительного** действия постоянных и временных длительных нагрузок

И прогиб для участков **с трещинами** в растянутой зоне:

$$\frac{1}{r} = \left(\frac{1}{r}\right)_1 - \left(\frac{1}{r}\right)_2 + \left(\frac{1}{r}\right)_3 \quad \text{и} \quad f = f_1 - f_2 + f_3$$

где $(1/r)_1$ и f_1 – кривизна и прогиб от **непродолжительного** действия **всей** нагрузки, на которую производят расчет по деформациям

$(1/r)_2$ и f_2 – кривизна и прогиб от **непродолжительного** действия постоянных и временных длительных нагрузок

$(1/r)_3$ и f_3 – кривизна и прогиб от **продолжительного** действия постоянных и временных длительных нагрузок

Полный прогиб элементов с трещинами

Вычисляемый по формуле:

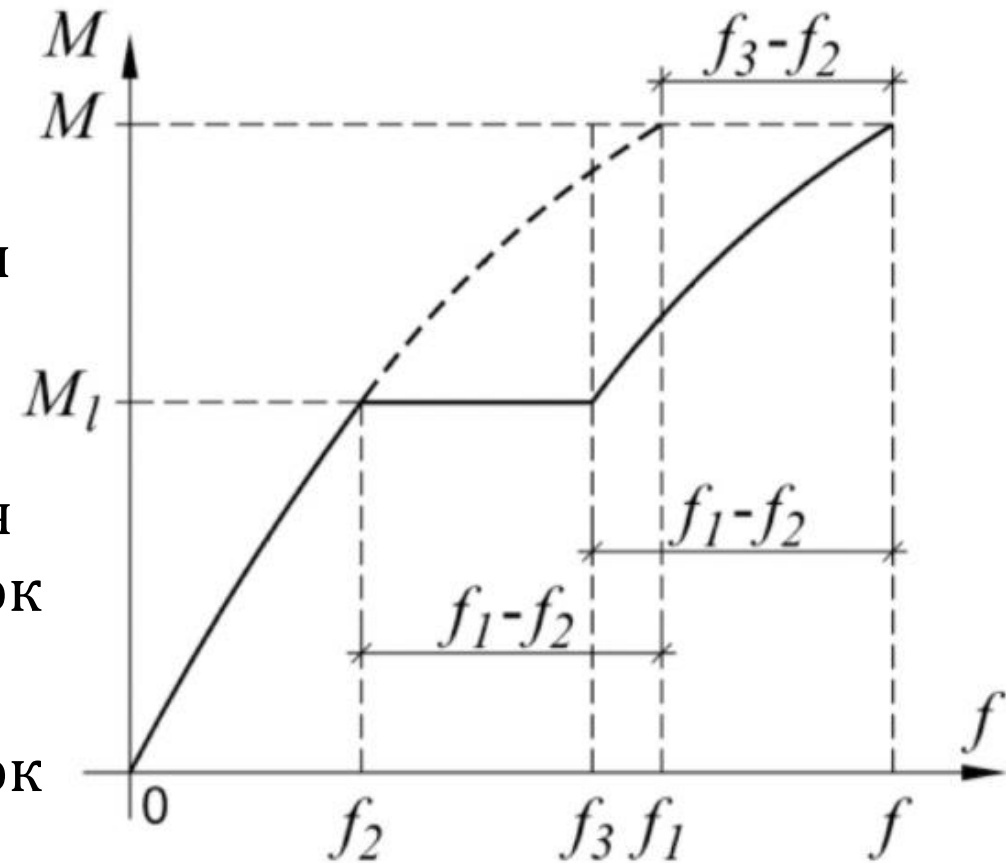
$$f = f_1 - f_2 + f_3,$$

можно проиллюстрировать с помощью представленной диаграммы, где:

f_1 – прогиб от **непродолжительного** действия **всей** нагрузки, на которую производят расчет по деформациям

f_2 – прогиб от **непродолжительного** действия постоянных и временных длительных нагрузок

f_3 – прогиб от **продолжительного** действия постоянных и временных длительных нагрузок



Жесткость ЖБЭ на участке без трещин (п. 8.2.26 СП 63)

И момент инерции приведенного поперечного сечения элемента относительно его центра тяжести определяется как для сплошного тела по формуле:

$$D = E_{b1} \cdot I_{x,red} \quad \text{и} \quad I_{x,red} = I_x + \alpha I_{x,s} + \alpha I'_{x,s}$$

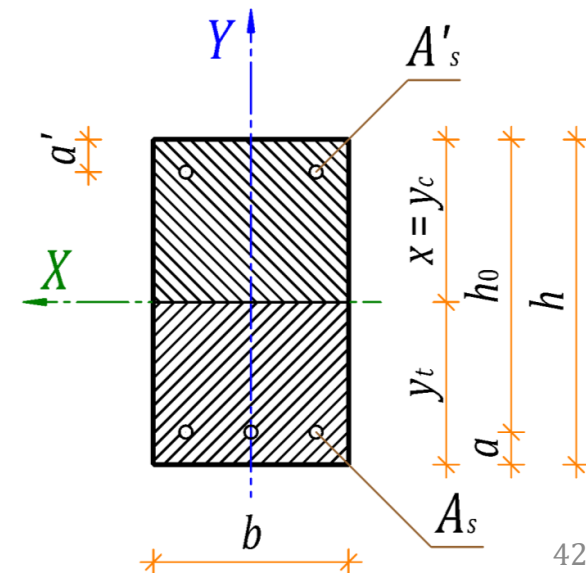
где $I_x = \frac{bh^3}{12}$, $I_{x,s} = A_s(y_t - a)^2$ и $I'_{x,s} = A'_s(y_c - a')^2$ – моменты инерции сечений бетона, растянутой и сжатой арматуры соответственно

$\alpha = E_s/E_{b1}$ – коэффициент приведения арматуры к бетону

$E_{b1} = 0,85E_b$ – при **непродолжительном** действии нагрузки

$E_{b1} = E_{b\tau} = \frac{E_b}{1+\varphi_{b,cr}}$ – при **продолжительном** действии нагрузки

$\varphi_{b,cr}$ – коэффициент ползучести по табл. 6.12 СП 63.13330



Жесткость ЖБЭ на участке с трещинами (п. 8.2.27 СП 63)

И момент инерции приведенного поперечного сечения элемента с трещиной определяется по формуле:

$$D_{crc} = E_{b1} I_{x,red,crc} \leq D \quad \text{и} \quad I_{x,red,crc} = I_{x,b} + \alpha_{s2} I_{x,s} + \alpha_{s1} I'_{x,s}$$

где $I_{x,s}$, $I'_{x,s}$ и $I_{x,b}$ – моменты инерции сечений растянутой и сжатых арматуры и бетона, соответственно

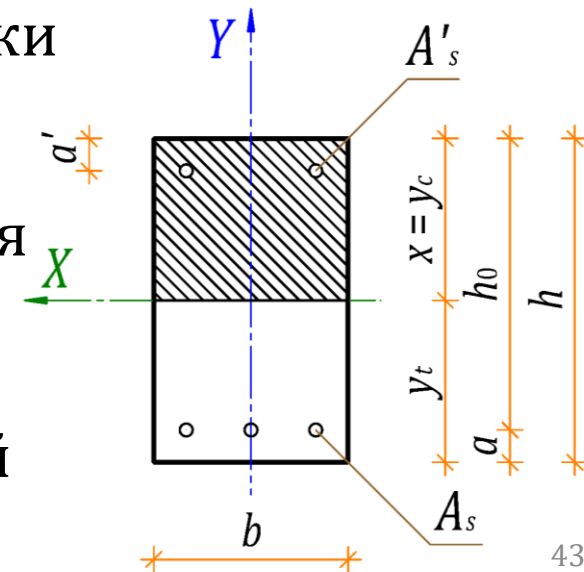
$E_{b1} = E_{b,red} = \frac{R_{b,ser}}{\varepsilon_{b1,red}}$ – приведенный модуль деформации сжатого бетона

$\varepsilon_{b1,red} = 0,0015$ – при **непродолжительном** действии нагрузки

$\varepsilon_{b1,red}$ – по табл. 6.10 СП 63 при **продолжительном** действии

Коэффициенты приведения арматуры к бетону определяются по следующим формулам:

$$\alpha_{s1} = \frac{E_s}{E_{b,red}} \quad \text{– для сжатой} \quad \text{и} \quad \alpha_{s2} = \frac{E_{s,red}}{E_{b,red}} \quad \text{– для растянутой}$$



Допускается прогибы ЖБЭ (п. 8.2.31 СП 63)

Определять с помощью методов строительной механики с использованием вместо кривизны $(1/r)$ фактических изгибных жесткостей D или D_{crc}

При совместном действии кратковременной и длительной нагрузок полный прогиб элементов без трещин и с трещинами в растянутой зоне определяют путем суммирования прогибов от соответствующих нагрузок по аналогии с суммированием кривизны

При расчете прогибов допускается принимать $\psi_s = 1$, тогда при совместном действии кратковременной и длительной нагрузок полный прогиб изгибаемых элементов **с трещинами** равен сумме прогибов от **непродолжительного** действия кратковременной нагрузки и от **продолжительного** действия длительной нагрузки с учетом соответствующих значений жесткостей D_{crc} :

$$\frac{1}{r} = \left(\frac{1}{r}\right)_1 + \left(\frac{1}{r}\right)_2$$

$(1/r)_1$, $(1/r)_2$ – кривизны соответственно от **непродолжительного** действия кратковременных нагрузок и от **продолжительного** действия постоянных и временных длительных нагрузок

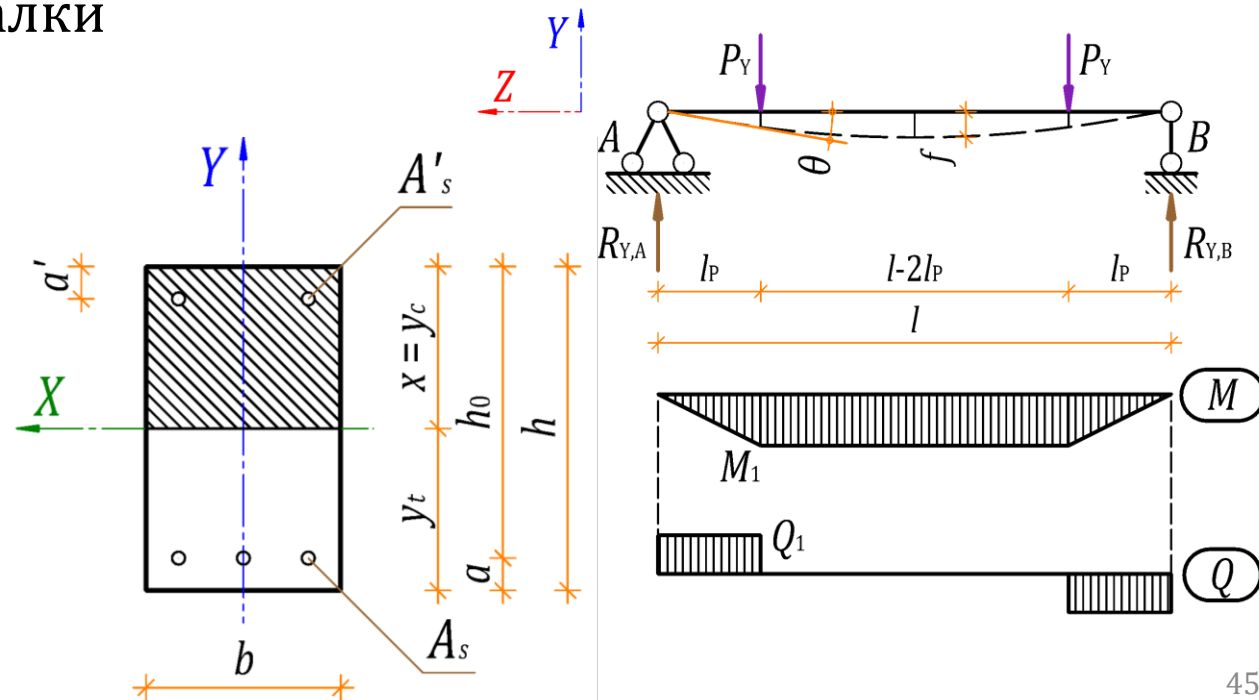
Пример 3. Расчет балки по прогибам

Дано: монолитная железобетонная балка из Примера 2, сечением $b \times h - 300 \times 500$ мм пролетом $l = 3,0$ м, изгибающий момент и опорная реакция от действия постоянных и длительно действующих нагрузок $M_{1,ser,l} = 128$ кНм и $R_{Y,A,ser} = P_{Y,ser} = 128$ кН, момент образования трещин $M_{crc} = 28,8$ кНм, моменты инерции приведенного сечения элемента без трещины $I_{x,red} = 3473 \cdot 10^{-6} \text{ м}^4$ и с трещиной $I_{x,red,crc} = 1994 \cdot 10^{-6} \text{ м}^4$, приведенный модуль деформации сжатого бетона $E_{b1} = E_{b,red} = 12333$ МПа, эстетико-психологические ограничения прогиба балки

Определим расстояние от опоры, где начинают образовываться нормальные трещины:

$$l_{crc} = \frac{M_{crc}}{R_{Y,A,ser}} = \frac{28,8}{128} = 0,225 \text{ м} \ll l = 3,0 \text{ м}$$

Принимаем по всей длине балки момент инерции с трещиной – $I_{x,red,crc}$



Пример 3. Прогиб балки в середине пролета

Определим максимальный прогиб данной балки (в середине пролета) от **продолжительного** действия постоянных и временных длительных нагрузок:

$$\begin{aligned} f &= U \cdot \frac{1}{r} = \frac{(3l^2 - 4l_p^2)}{24} \cdot \frac{M_{ser,l}}{D_{crc}} = \frac{(3l^2 - 4l_p^2)}{24} \cdot \frac{P_{Y,ser}l_p}{E_{b1}I_{x,red,crc}} = \\ &= \frac{(3 \cdot 3^2 - 4 \cdot 1^2)}{24} \cdot \frac{128 \cdot 1}{12333 \cdot 10^3 \cdot 1994 \cdot 10^{-6}} = \mathbf{0,005 \text{ м} = 5 \text{ мм}} \end{aligned}$$

U – коэффициент, соответствующий характеру нагружения и граничным условиям

Определим предельно допустимый прогиб балки от **продолжительного** действия постоянных и временных длительных нагрузок согласно табл. Д.1 СП 20.13330:

$$f_{ult} = \frac{l}{150} = \frac{3000}{150} = \mathbf{20 \text{ мм}}$$

Проверим выполнение условия:

$$f = \mathbf{5 \text{ мм}} \leq f_{ult} = \mathbf{20 \text{ мм}}$$

Прогибы в равнопролетных неразрезных балках

С постоянной изгибной жесткостью и шарнирными узлами на концах балки от действия равномерно распределенных нагрузок определяются в середине пролетов по формуле:

$$f_{max} = J \cdot \frac{ql^4}{EI} = J \cdot m \cdot l^2 \cdot \frac{M}{D} = U \cdot \frac{1}{r}$$

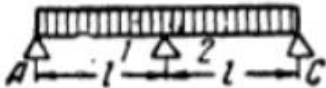
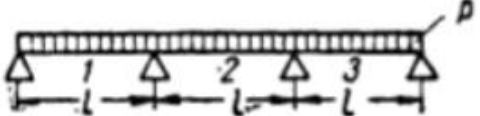
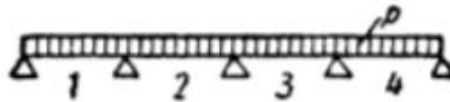
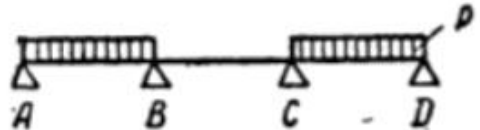
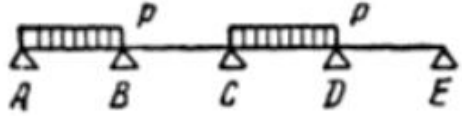

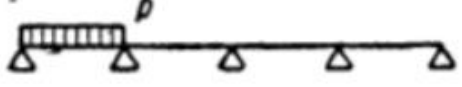

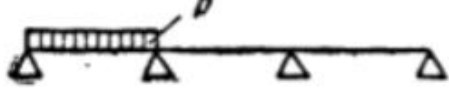
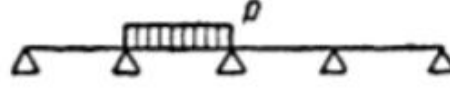
где J – коэффициент из таблицы «Справочника проектировщика» (на следующем слайде), соответствующий количеству пролетов и схеме нагрузки

$M = \frac{ql^2}{m}$ – максимальный изгибающий момент в пролете

$m = 11$ – для крайнего пролета и $m = 16$ – для второго пролета

$U = J \cdot m \cdot l^2$ – коэффициент для расчета прогибов на основе кривизны

Коэффициент J для определения прогибов

Два пролета		Три пролета			Четыре пролета			
схема нагрузки	прогиб в пролете 1	схема нагрузки	прогиб		схема нагрузки	прогиб		
			в пролете 1	в пролете 2		в пролете 1	в пролете 2	в пролете 3
	0,00520		0,00675	0,00052		0,00630	0,00190	—
			0,00987	—		0,00962	—	0,00738
			—	0,0675		0,00882	—	—
	0,00906		0,00882	—		—	0,00657	—

Литература:

- СП 63.13330.2018 Бетонные и железобетонные конструкции
- СП 20.13330.2016 Нагрузки и воздействия
- Кумпяк О. Г., Самсонов В. С., Галяутдинов З. Р., Пахмурин О. Р. Железобетонные и каменные конструкции. – М.: Издательство АСВ, 2014. – 672 с.
- Уманский А.А. и др. Справочник проектировщика. Расчетно-теоретический. – М.: Государственное издательство литературы по строительству, архитектуре и строительным материалам, 1960. – 1040 с.

ИФО | 01.03.04 | ПМ | 6-й семестр

Строительные конструкции

Лекция №22



НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ

**СТРОИТЕЛЬНЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ**

www: mgsu.ru/universityabout/Struktura/Kafedri/ZhBK/

e-mail: gbk@mgsu.ru; dpekin@mail.ru

тел.: +7 495 287 49 14 доб. 3036, 3084

Пекин Дмитрий Анатольевич, доцент, к.т.н.