

ИФО | 01.03.04 | ПМ | 6-й семестр

Строительные конструкции

Лекция №18



НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ

**СТРОИТЕЛЬНЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ**

www: mgsu.ru/universityabout/Struktura/Kafedri/ZhBK/

e-mail: g bk@mgsu.ru; dpekin@mail.ru

тел.: +7 495 287 49 14 доб. 3036, 3084

Пекин Дмитрий Анатольевич, доцент, к.т.н.

Лекция №18 – Бетонные конструкции

- Общие сведения
- Теории прочности бетона
- Расчет конструкций по первой группе предельных состояний:
 - Расчет внецентренно сжатых бетонных элементов без учета сопротивления бетона растянутой зоны
 - Упрощенный расчет внецентренно сжатых бетонных элементов без учета сопротивления бетона растянутой зоны
 - Расчет внецентренно сжатых бетонных элементов без учета сопротивления бетона растянутой зоны при косом внецентренном сжатии
 - Расчет внецентренно сжатых бетонных элементов при недопущении образования трещин
 - Расчет изгибаемых бетонных элементов

Бетонные конструкции

Являются составной частью более широкого класса **железобетонных** конструкций и, кроме того, в качестве элементов кладки могут использоваться в **каменных** и **армокаменных** конструкциях

Конструкции рассматривают как **бетонные**, если их прочность может быть обеспечена только работой **бетона** или при содержании арматуры менее **минимальных** требуемых значений согласно п. 10.3 СП 63.13330

Эксплуатационные свойства **бетонных** конструкций также зависят от вида и физико-механических свойств материалов бетонной смеси

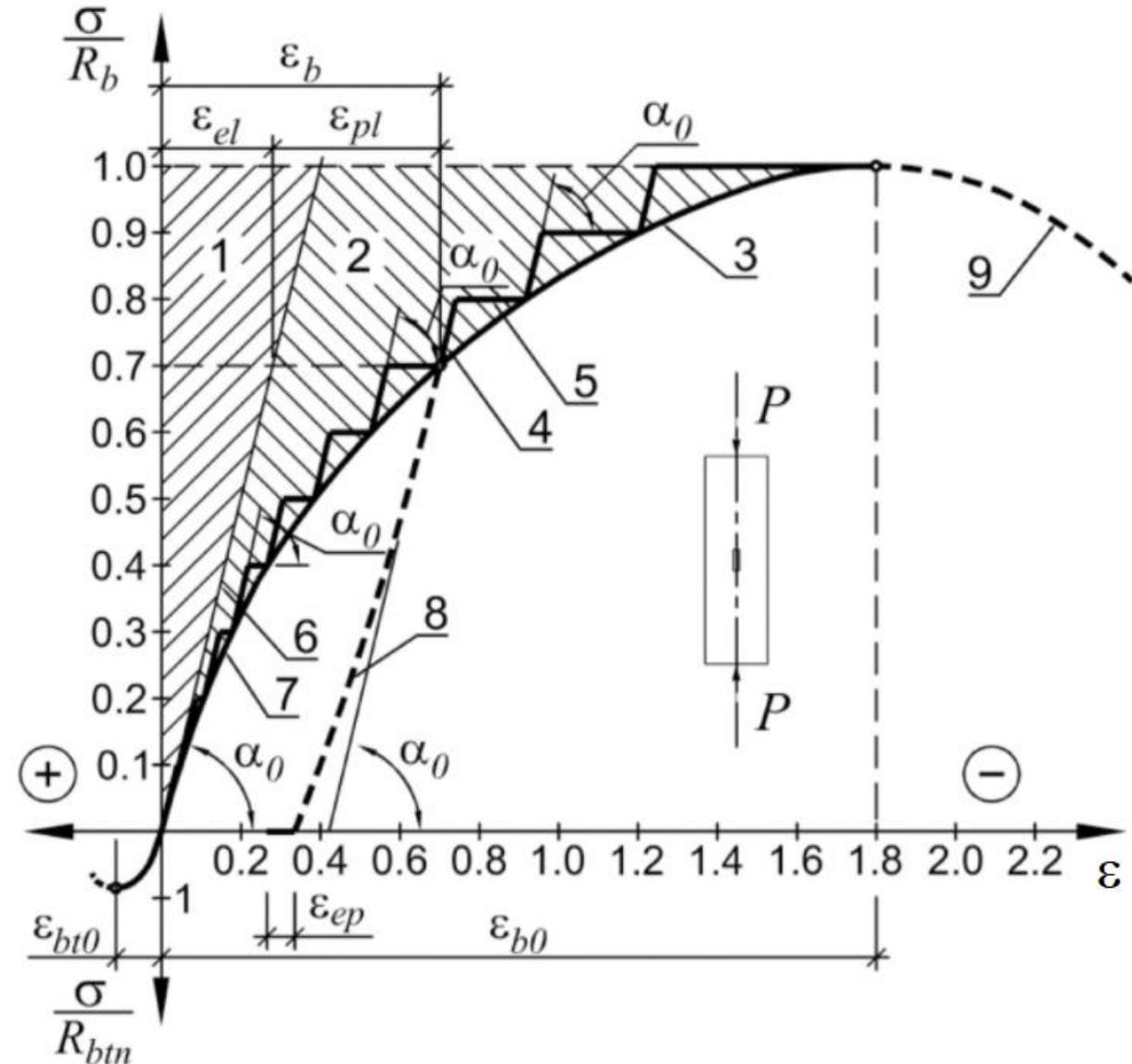
Долговечность бетона также в значительной степени определяется его **морозостойкостью** и обозначается маркой **F**, означающей количество циклов замораживания и оттаивания в насыщенном водой состоянии без разрушения (расслоение, растрескивание, выкрашивание)

Бетонные элементы применяют:

- В конструкциях работающих преимущественно на **сжатие** при расположении продольной сжимающей силы **в пределах** поперечного **сечения** элемента
- В отдельных случаях в конструкциях, работающих на сжатие при расположении продольной сжимающей силы **за пределами** поперечного **сечения** элемента, а также в изгибаемых конструкциях, когда их разрушение не представляет непосредственной опасности для жизни людей и сохранности оборудования (плиты пола, опоры, ...)

Зависимость σ - ε для бетона

- 1 – область упругих деформаций
- 2 – область неупругих деформаций
- 3, 7 – кривая полных деформаций
- 4, 6 – прямые упругих деформаций
- 5 – пластические деформации
- 8 – кривая разгрузки
- 9 – нисходящая ветвь



Теории прочности бетона

Предполагается, что **прочность** бетона в каждой точке его объема определяется исключительно **характером** и **величиной** ее **напряженного** состояния, т. е. существует определенная **поверхность** в системе координат **главных** напряжений $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, которая является **геометрической** интерпретацией условия **прочности** бетона

Напряженные **состояния**, характеризующиеся точками **внутри** этой поверхности, не вызывают **разрушения** бетона. Очевидно, что начало координат этой системы в точке $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 0$ соответствует **ненапряженному** состоянию бетона

Теория прочности бетона Гениева-Киссюка

Является **обобщением** теории прочности **Мора** применительно к бетону:

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1) - (R_b - R_{bt})(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) - R_b R_{bt} = 0$$

где $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ – главные напряжения

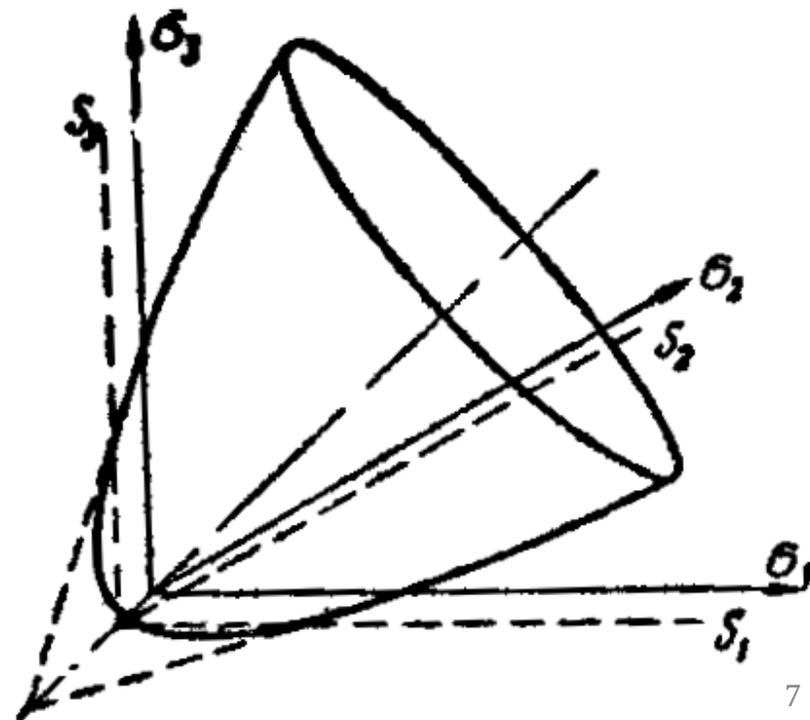
R_b, R_{bt} – сопротивления бетона осевому сжатию и растяжению соответственно

В обозначениях инвариантов тензора напряжений критерий прочности:

$$\sigma_i^2 = R_b R_{bt} + 3\sigma(R_b - R_{bt})$$

где $\sigma = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)/3$ – гидростатическое давление (среднее напряжение)

$\sigma_i = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)}$ – интенсивность напряжений



Характерные точки на поверхности прочности:

1 – всестороннее растяжение: $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma = -H$; $\sigma_i = 0$, тогда предел прочности при всестороннем растяжении:

$$R'''_{bt} = H = \frac{R_b R_{bt}}{3(R_b - R_{bt})}$$

2 – одноосное растяжение: $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$;

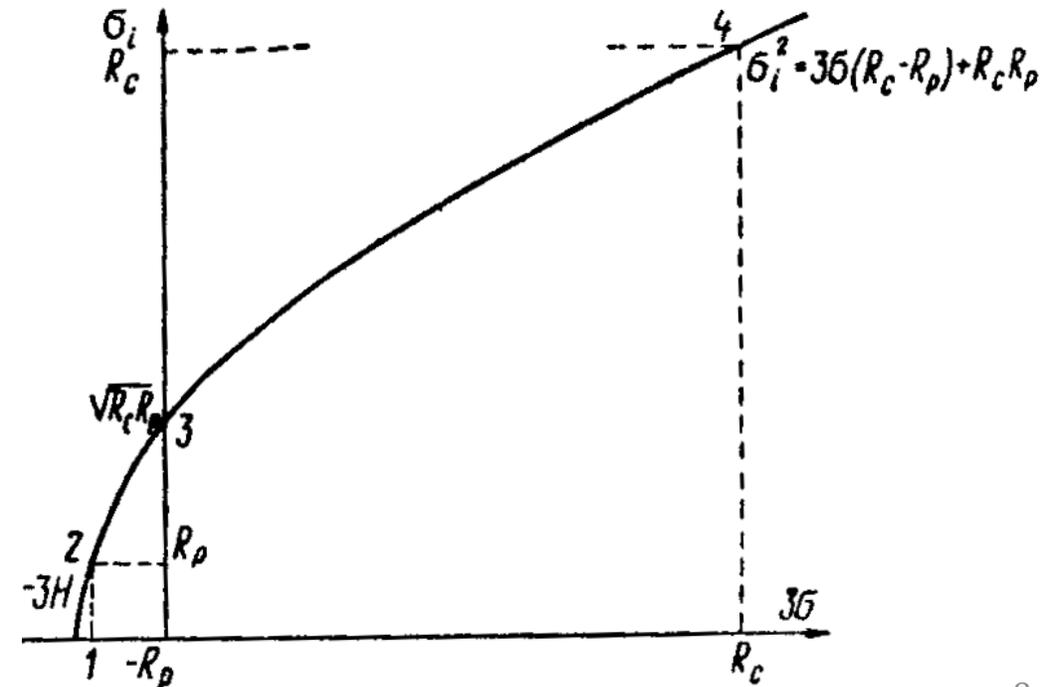
$\sigma_1 = 3\sigma = -R_{bt}$, тогда $\sigma_i = R_{bt}$

3 – чистый сдвиг: $\sigma_3 = 3\sigma = 0$; $\sigma_1 = -\sigma_2 = T$,
тогда $\sigma_i = R_{bt} = \sqrt{R_b R_{bt}} = T\sqrt{3}$

4 – одноосное сжатие: $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$;

$\sigma_1 = 3\sigma = R_b$, тогда $\sigma_i = R_b$

Сжимающие напряжения приняты положительными, растягивающие отрицательными и $R_b = R_c$ и $R_{bt} = R_p$



Виды напряженного состояния:

Плоское напряженное состояние при $\sigma_3 = 0$ показано на рисунке, тогда:

$$\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2 - (R_b - R_{bt})(\sigma_1 + \sigma_2) - R_bR_{bt} = 0$$

при этом **в случае** $\sigma_2 = 0$, получим:

$$\sigma_1^2 - (R_b - R_{bt})\sigma_1 - R_bR_{bt} = 0 \rightarrow (\sigma_1)_1 = R_b \text{ и } (\sigma_1)_2 = -R_{bt}$$

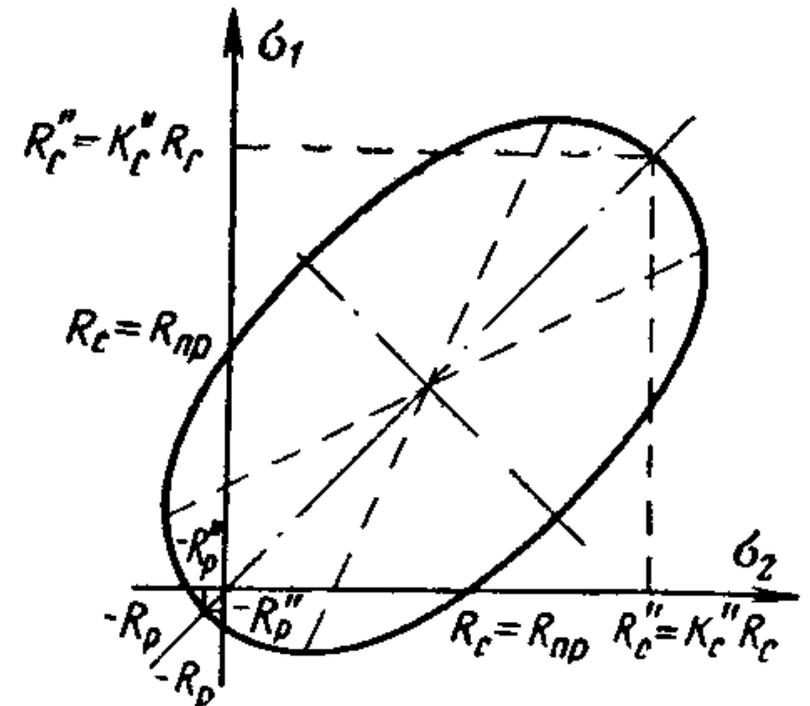
в случае $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma''$, получим:

$$\sigma'' = (R_b - R_{bt}) \pm \sqrt{R_b^2 - R_bR_{bt} + R_{bt}^2}$$

Пределы прочности при равномерном **двухосном** сжатии и растяжении:

$$R''_b = \sigma''_1 = \sqrt{R_b^2 - R_bR_{bt} + R_{bt}^2} + (R_b - R_{bt})$$

$$R''_{bt} = -\sigma''_2 = \sqrt{R_b^2 - R_bR_{bt} + R_{bt}^2} - (R_b - R_{bt})$$



Теория прочности бетона Вильяма-Варнка

Бетон **растрескивается** (при растяжении) или **раздрабливается** (при сжатии) при выполнении условия:

$$\frac{F}{f_c} - S \geq 0 \quad \text{или} \quad \frac{F}{R_b} - S \geq 0$$

где F – функция состояния главных напряжений $\sigma_{xp}, \sigma_{yp}, \sigma_{zp}$

S – поверхность разрушения, выраженная в компонентах главных напряжений и пятью параметрами $f_t, f_c, f_{cb}, f_1, f_2$:

$f_t = R_{bt}$ – предельная прочность при одноосном растяжении

$f_c = R_b$ – предельная прочность при одноосном сжатии

$f_{cb} = R_b''$ – предельная прочность при двухосном сжатии

f_1 и f_2 – предельная прочность при двухосном и одноосном сжатии соответственно, наложенном на гидростатическое напряжение σ_h^a



Случаи разрушения бетона:

- **Случай 1:** $0 \geq \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ (сжатие-сжатие-сжатие)
- **Случай 2:** $\sigma_1 \geq 0 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ (растяжение-сжатие-сжатие)
- **Случай 3:** $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq 0 \geq \sigma_3$ (растяжение-растяжение-сжатие)
- **Случай 4:** $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 \geq 0$ (растяжение-растяжение-растяжение)

где $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ – главные напряжения

$f_t = R_{bt}$ – предельная прочность при одноосном растяжении

$f_c = R_b$ – предельная прочность при одноосном сжатии

$f_{cb} = R_b'' = 1,2R_b$ – предельная прочность при двухосном сжатии

$f_1 = 1,45R_b$ и $f_2 = 1,725R_b$ – предельная прочность при двухосном и одноосном сжатии соответственно, наложенном на гидростатическое напряжение σ_h^a



Поверхность разрушения:

И критерий прочности для **случая 1**: $0 \geq \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ (сжатие-сжатие-сжатие):

$$F = F_1 = \frac{1}{\sqrt{15}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}$$

$$S = S_1 = \frac{2r_2(r_2^2 - r_1^2) \cos \eta + r_2(2r_1 - r_2) \sqrt{4(r_2^2 - r_1^2) \cos^2 \eta + 5r_1^2 - 4r_1 \cdot r_2}}{4(r_2^2 - r_1^2) \cos^2 \eta + (r_2 - 2r_1)^2}$$

где $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ – главные напряжения

$$\cos \eta = \frac{2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}}$$

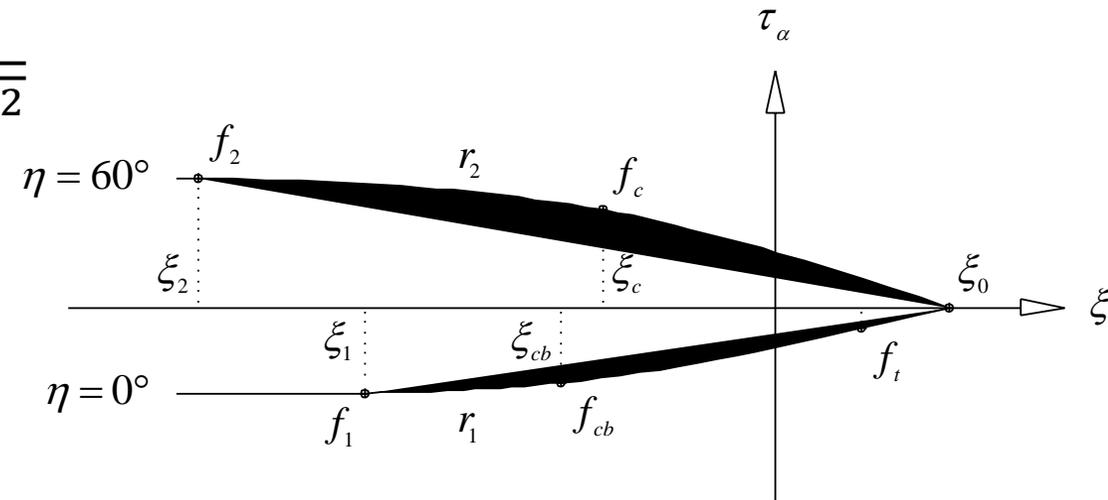
$$r_1 = a_0 + a_1 \cdot \xi + a_2 \cdot \xi^2$$

$$r_2 = b_0 + b_1 \cdot \xi + b_2 \cdot \xi^2$$

$$\xi = \sigma_h / R_b$$

$$\text{при } |\sigma_h| = (\sigma_{xp} + \sigma_{yp} + \sigma_{zp}) / 3 \leq \sqrt{3} \cdot R_b$$

σ_h – гидростатическое давление (среднее напряжение)



Сечение вдоль поверхности разрушения при трехосном НДС

Поверхность разрушения:

И критерий прочности для **случая 2**: $\sigma_1 \geq 0 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ (растяжение-сжатие-сжатие):

$$F = F_2 = \frac{1}{\sqrt{15}} \sqrt{(\sigma_2 - \sigma_3)^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2}$$

$$S = S_2 = \left(1 - \frac{\sigma_1}{R_{bt}}\right) \frac{2p_2(p_2^2 - p_1^2) \cos \eta + p_2(2p_1 - p_2) \sqrt{4(p_2^2 - p_1^2) \cos^2 \eta + 5p_1^2 - 4p_1 \cdot p_2}}{4(p_2^2 - p_1^2) \cos^2 \eta + (p_2 - 2p_1)^2}$$

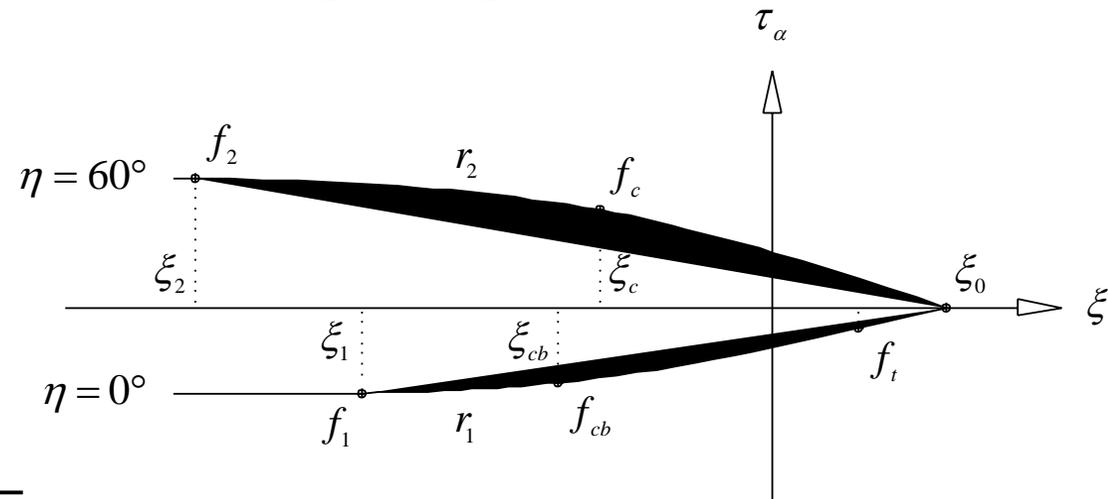
где $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ – главные напряжения

$$p_1 = a_0 + a_1 \cdot \chi + a_2 \cdot \chi^2$$

$$p_2 = b_0 + b_1 \cdot \chi + b_2 \cdot \chi^2$$

$$\chi = \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{3R_b} \quad \text{при } |\sigma_h| \leq \sqrt{3} \cdot R_b$$

$$\cos \eta = \frac{2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}}$$



Сечение вдоль поверхности разрушения при трехосном НДС

Поверхность разрушения:

И критерий прочности для **случая 3**: $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq 0 \geq \sigma_3$ (растяжение-растяжение-сжатие):

$$F = F_3 = \sigma_i; \quad i = 1, 2$$

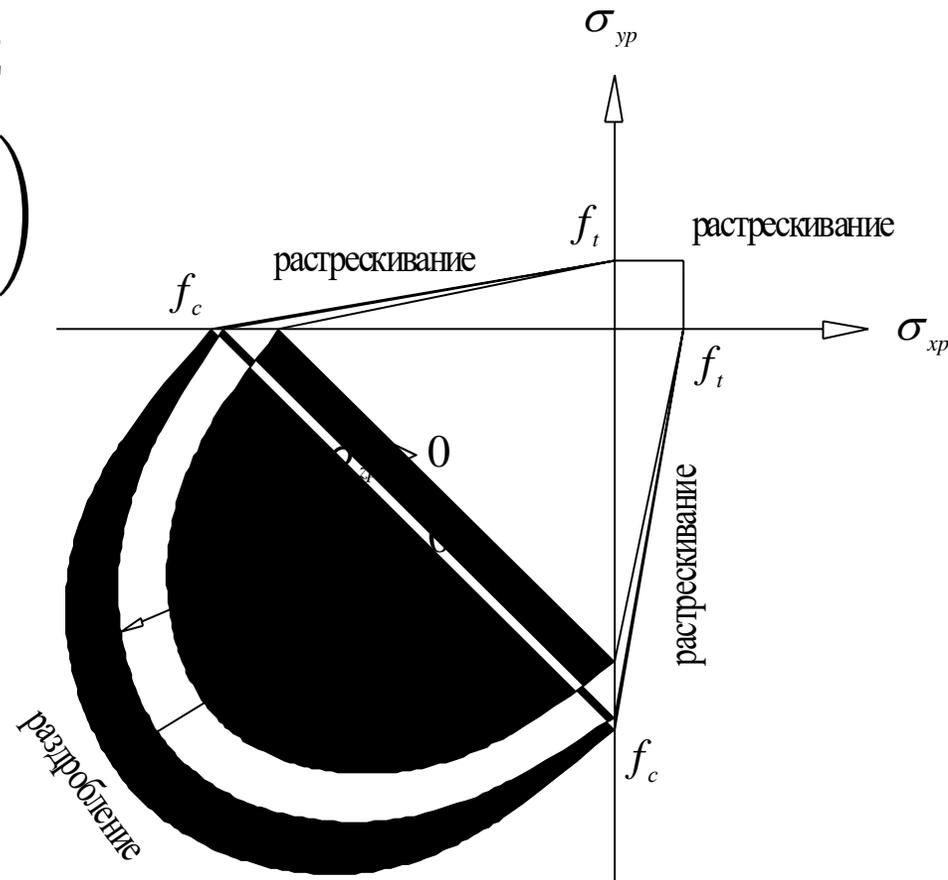
$$S = S_3 = \frac{R_{bt}}{R_b} \left(1 + \frac{\sigma_3}{R_b} \right)$$

и для **случая 4**: $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 \geq 0$ (растяжение-растяжение-растяжение):

$$F = F_4 = \sigma_i; \quad i = 1, 2, 3$$

$$S = S_4 = \frac{R_{bt}}{R_b}$$

где $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ – главные напряжения



Поверхность разрушения
для двухосного НДС

Особенности теории прочности Вильяма-Варнка

Функции F (состояния главных напряжений) и S (поверхности разрушения) выражаются в компонентах главных напряжений $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ и при этом учитываются следующие условия:

$$\sigma_1 = \max(\sigma_{xp}, \sigma_{yp}, \sigma_{zp}), \quad \sigma_3 = \min(\sigma_{xp}, \sigma_{yp}, \sigma_{zp}), \quad \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$$

В каждом из приведенных случаев НДС для описания F и S используются независимые функции: F_1, F_2, F_3, F_4 и S_1, S_2, S_3, S_4

Функции S_i ($i = 1 \dots 4$), описывающие поверхность разрушения, являются непрерывными, при этом градиенты поверхности не являются непрерывными, если любое главное напряжение меняет знак

Расчет бетонных элементов (п. 5.2.1, 7.1.1-7.1.6 СП 63)

- Бетонные элементы рассчитывают по прочности на действие продольных сжимающих **сил**, изгибающих **моментов** и поперечных **сил**, а также на **местное сжатие**
- Расчет по прочности бетонных элементов при действии продольной сжимающей силы (внецентренное сжатие) и изгибающего момента следует производить для **сечений**, нормальных к их продольной оси
- Прочность бетонных элементов по **наклонным** сечениям при действии поперечных сил обеспечена, если сумма отношений **главных растягивающих** напряжений σ_{mt} к R_{bt} и **главных сжимающих** напряжений σ_{mc} к R_b составляет менее 1,0

Расчет бетонных элементов

При внецентренном сжатии выполняется двумя различными способами в зависимости от условий эксплуатации:

- **Без учета** сопротивления бетона растянутой зоны в опасных нормальных сечениях по предельным усилиям согласно п. 5.2.4, 7.1.3 СП 63.13330
- **С учетом** сопротивления бетона растянутой зоны в опасных нормальных сечениях по предельным усилиям согласно п. 5.2.5, 7.1.12 СП 63.13330

При расчете **внецентренно сжатых** бетонных элементов следует учитывать влияние продольного **изгиба** и случайных **эксцентриситетов**

Расчет бетонных элементов (п. 5.2.4, 7.1.3 СП 63)

Без учета сопротивления бетона растянутой зоны в опасных нормальных сечениях по предельным усилиям:

- В случае внецентренного сжатия при значениях эксцентриситета продольной силы, не превышающих 0,9 расстояния от центра тяжести сечения до наиболее сжатой грани. При этом предельное усилие, воспринимаемое элементом, определяют по расчетному R_b , **равномерно** распределенному по **условной сжатой зоне сечения** с центром тяжести, совпадающим с точкой приложения продольной силы
- В **массивных** бетонных конструкциях принимается **треугольная** эпюра сжимающих напряжений, не превышающих расчетного R_b . При этом эксцентриситет продольной силы относительно центра тяжести сечения не должен превышать 0,65 расстояния от центра тяжести до сжатой грани

Расчет бетонных элементов (п. 5.2.4, 7.1.3, 7.1.9 СП 63)

Без учета растянутого бетона выполняется по формуле:

$$N \leq R_b A_b,$$

где N – действующая продольная сила;

A_b – площадь сжатой зоны бетона для прямоугольного сечения с учетом прогиба:

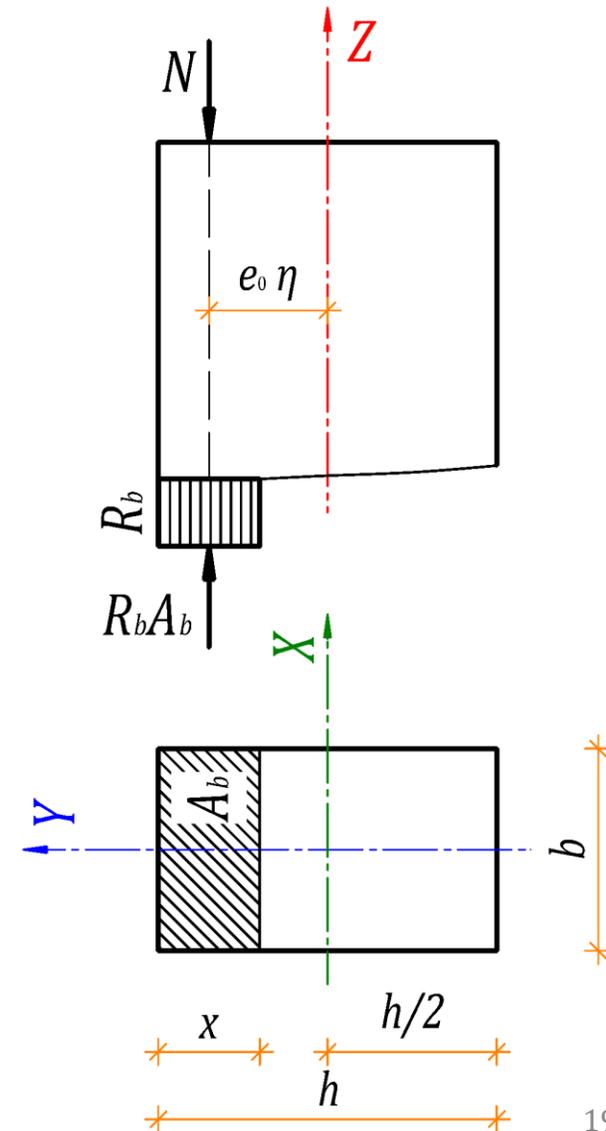
$$A_b = bh \left(1 - \frac{2e_0\eta}{h} \right) = b(h - 2e_0\eta) = bx$$

$e_0 = M/N$ – эксцентриситет силы N ;

$e_0 \geq e_a$ – случайный эксцентриситет не менее:

$1/600l$ или $1/30h$ или 10 мм;

η – коэффициент учета прогиба при $l_0/i_y \geq 14$



Расчет бетонных элементов (п. 5.2.4, 7.1.3, 7.1.9 СП 63)

$\eta > 1$ – коэффициент влияния прогиба:

$$\eta = \frac{1}{1 - \frac{N}{N_{cr}}}$$

N_{cr} – критическая сила (по Эйлеру):

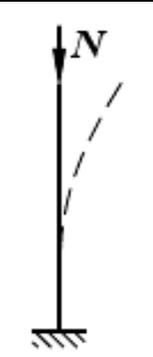
$$N_{cr} = \frac{\pi^2 k_b E_b I}{l_0^2} > N,$$

где E_b – модуль упругости бетона;

$I = \frac{bh^3}{12}$ – момент инерции бетона;

$l_0 = \mu l$ – расчетная длина элемента;

μ – коэффициент расчетной длины;

Схема закрепления элемента				
μ	1,0	0,7	0,5	2,0

$$k_b = \frac{0,15}{\varphi_l (0,3 + \delta_e)},$$

где

$$\varphi_l = 1 + \frac{M_l}{M} = 1 + \frac{N_l(e_l + h/2)}{N(e_0 + h/2)} < 2$$

$\delta_e = \frac{e_0}{h}$ – относительный эксцентриситет $0,15 \leq \delta_e \leq 1,5$

Коэффициент расчетной длины μ (п. 8.1.17 СП 63)

Схема закрепления элемента	μ
а) для элементов с шарнирным опиранием на двух концах	1,0
б) для элементов с жесткой заделкой (исключающей поворот опорного сечения) на одном конце и незакрепленным другим концом (консоль)	2,0
в) для элементов с шарнирным несмещаемым опиранием на одном конце, а на другом конце:	
- с жесткой (без поворота) заделкой	0,7
- с податливой (допускающей ограниченный поворот) заделкой	0,9
г) для элементов с податливым шарнирным опиранием (допускающим ограниченное смещение опоры) на одном конце, а на другом конце:	
- с жесткой (без поворота) заделкой	1,5
- с податливой (с ограниченным поворотом) заделкой	2,0
д) для элементов с несмещаемыми заделками на двух концах:	
- жесткими (без поворота)	0,5
- податливыми (с ограниченным поворотом)	0,8
е) для элементов с ограниченно смещаемыми заделками на двух концах:	
- жесткими (без поворота)	0,8
- податливыми (с ограниченным поворотом)	1,2

Пример 1. Бетонная колонна без учета растянутого бетона

Дано: монолитная бетонная колонна сечением $b \times h - 300 \times 500$ мм высотой $l = 3,0$ м, бетон класса В15 ($E_b = 24000$ МПа, $R_b = 8,5$ МПа), полная нагрузка $N = 550$ кН, в том числе постоянная и длительная нагрузка $N_l = 440$ кН, эксцентриситет $e_{0y} = e_l = 100$ мм, шарнирные узлы сопряжения - коэффициент расчетной длины $\mu = 1$, радиусы инерции $i_y = 144$ мм и $i_x = 87$ мм, радиусы ядра сечения $\rho_y = 83$ мм и $\rho_x = 50$ мм, момент инерции относительно оси $X - I_x = 3125 \cdot 10^{-6}$ м⁴

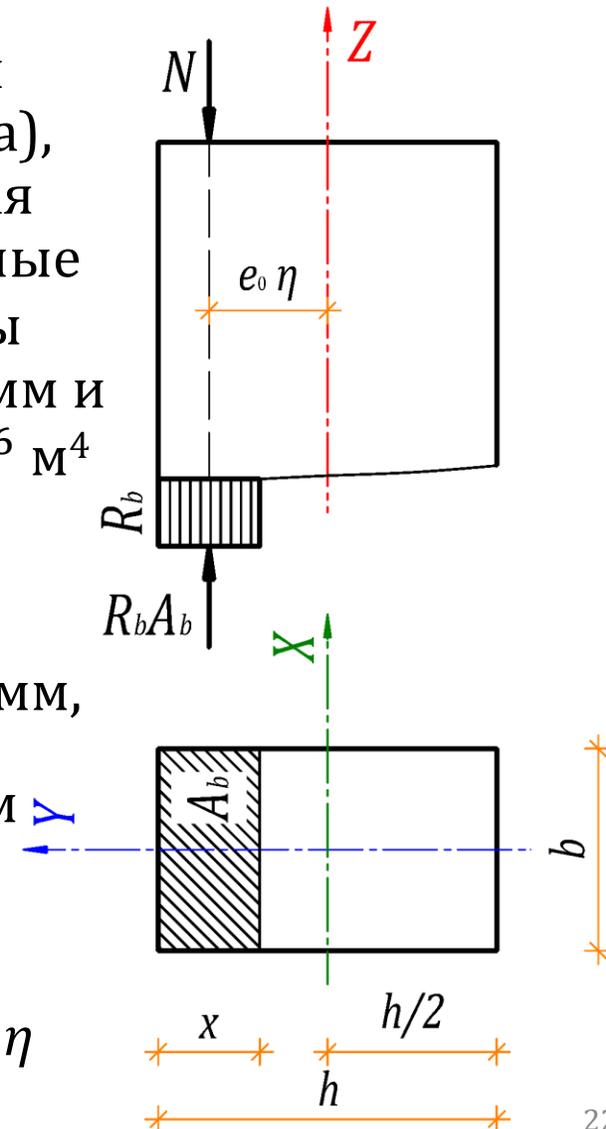
Определяем случайный эксцентриситет e_a :

$$e_a = \frac{l}{600} = \frac{3000}{600} = 5 \text{ мм или } e_a = \frac{h}{30} = \frac{500}{30} = 17 \text{ мм или } e_a = 10 \text{ мм,}$$

сравниваем его с заданным по условиям задачи - $e_a \leq e_0 = 100$ мм

Вычисляем гибкость - $l_0/i_y = \mu l/i_y = 1 \cdot 3000/144 = 20,8 \geq 14$

и, следовательно, увеличиваем e_0 на коэффициент учета прогиба η



Пример 1. Определение критической силы N_{cr}

Определяем коэффициент влияния длительности действия нагрузки φ_l и относительный эксцентриситет δ_e :

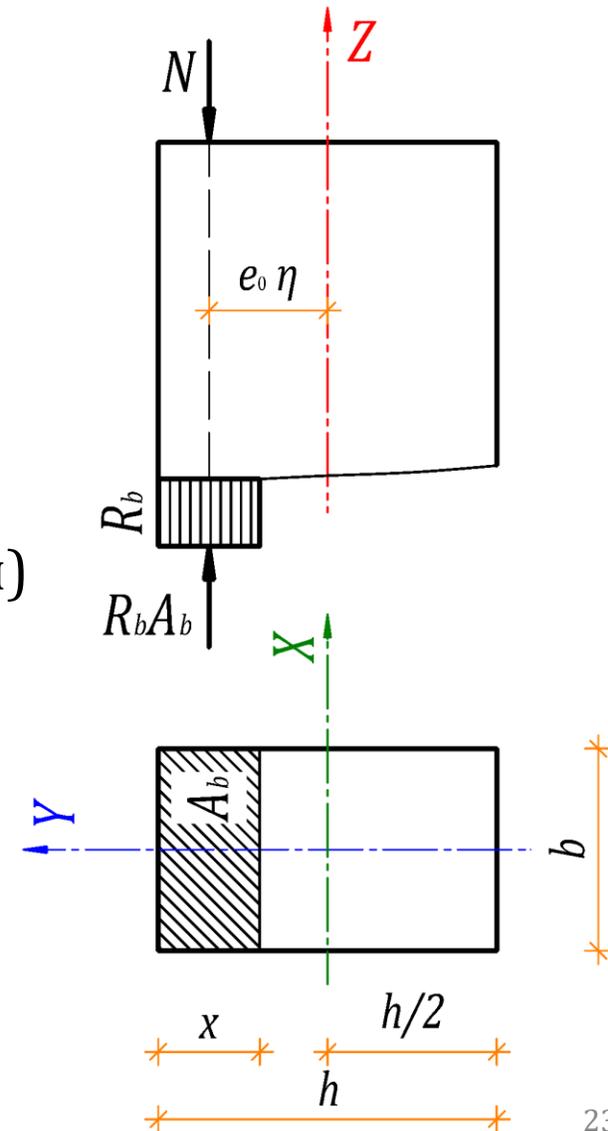
$$\varphi_l = 1 + \frac{M_l}{M} = 1 + \frac{N_l(e_l + h/2)}{N(e_0 + h/2)} = 1 + \frac{440(0,1 + 0,5/2)}{550(0,1 + 0,5/2)} = 1,8 < 2,$$

$$\delta_e = \frac{e_0}{h} = \frac{100}{500} = 0,2 \quad (0,15 \leq \delta_e \leq 1,5)$$

для нахождения коэффициента k_b (снижения изгибной жесткости) и критической силы N_{cr} :

$$k_b = \frac{0,15}{\varphi_l(0,3 + \delta_e)} = \frac{0,15}{1,8(0,3 + 0,2)} = 0,17$$

$$N_{cr} = \frac{\pi^2 k_b E_b I}{l_0^2} = \frac{3,14^2 \cdot 0,17 \cdot 24 \cdot 10^6 \cdot 3125 \cdot 10^{-6}}{3,0^2} = 13968 \text{ кН}$$



Пример 1. Проверка колонны при внецентренном сжатии

Определяем коэффициент влияния прогиба η и площадь сжатой зоны бетона A_b :

$$\eta = \frac{1}{1 - \frac{N}{N_{cr}}} = \frac{1}{1 - \frac{550}{13968}} = \frac{1}{1 - 0,039} = 1,04$$

$$A_b = b(h - 2e_0\eta) = 0,3(0,5 - 2 \cdot 0,1 \cdot 1,04) = 0,3 \cdot 0,292 = 0,0876 \text{ м}^2$$

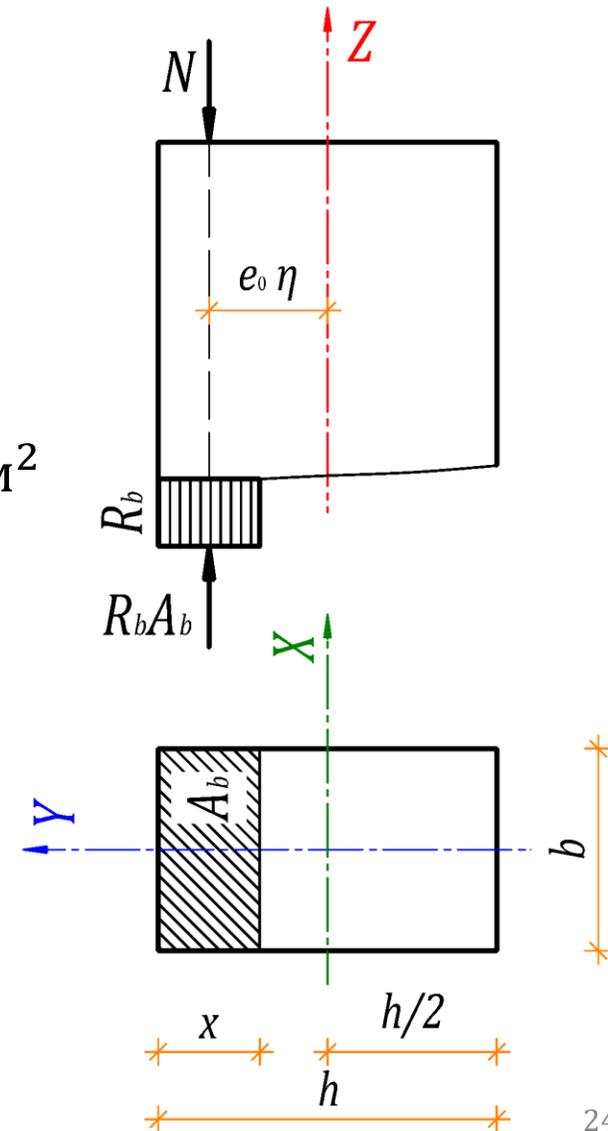
для проверки прочности колонны при внецентренном сжатии:

$$N = 550 \text{ кН} \leq R_b A_b \gamma_{b2} \gamma_{b3} = 8500 \cdot 0,0876 \cdot 0,9 \cdot 0,85 = 570 \text{ кН},$$

где $\gamma_{b2} = 0,9$ и $\gamma_{b3} = 0,85$ коэффициенты условий работы

Проверка предельной гибкости колонны согласно п. 10.2.2 СП 63:

$$\frac{l_0}{i_y} = \frac{1 \cdot 3000}{144} = 20,8 < 90 \quad \text{и} \quad \frac{l_0}{i_x} = \frac{1 \cdot 3000}{87} = 34,5 < 90$$



Допускается расчет (п. 5.2.4, 7.1.3, 7.1.9 СП 63)

Бетонных элементов без учета растянутого бетона при $e_0 \leq h/30$ и $l_0 \leq 20h$ выполнять по формуле:

$$N \leq \varphi R_b A,$$

где N – действующая продольная сила;

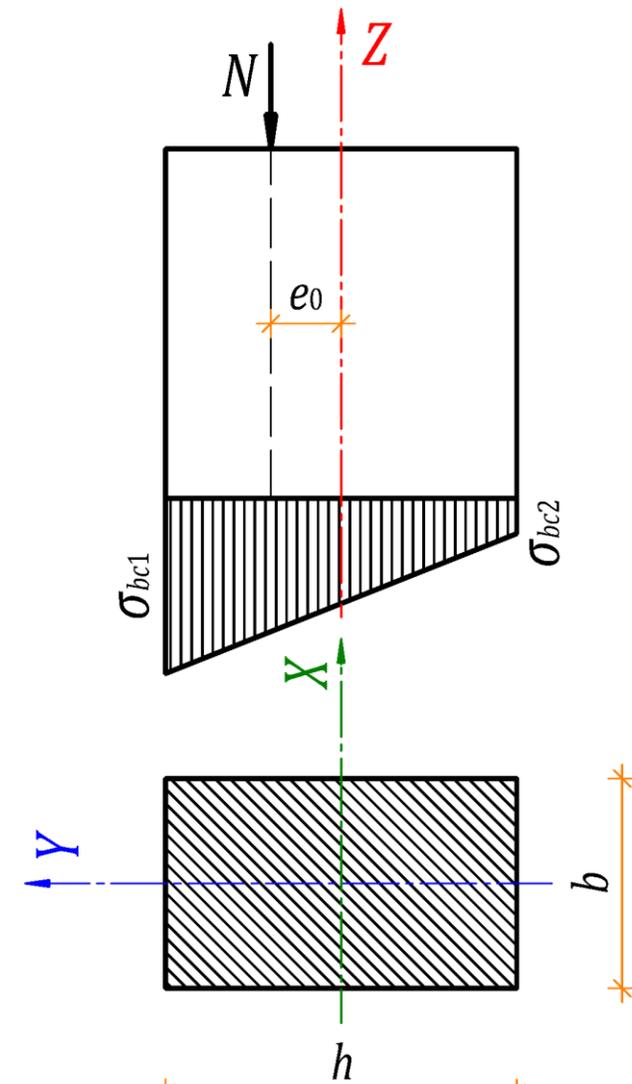
$A = bh$ – площадь поперечного сечения;

φ – коэффициент продольного изгиба при длительном действии нагрузки по таблице:

l_0/h	6	10	15	20
φ_l	0,92	0,9	0,8	0,6

и при кратковременном действии по линейному закону, принимая:

$\varphi = 0,9$ при $l_0/h = 10$ и $\varphi = 0,85$ при $l_0/h = 20$



Пример 2. Бетонная колонна из плоскости действия момента

Дано: монолитная бетонная колонна из Примера 1

Определяем случайный эксцентриситет в другой плоскости e_a :

$$e_a = \frac{l}{600} = \frac{3000}{600} = 5 \text{ мм или } e_a = \frac{b}{30} = \frac{300}{30} = 10 \text{ мм или } e_a = 10 \text{ мм,}$$

и принимаем максимальное значение - $e_0 = e_a = 10 \text{ мм}$

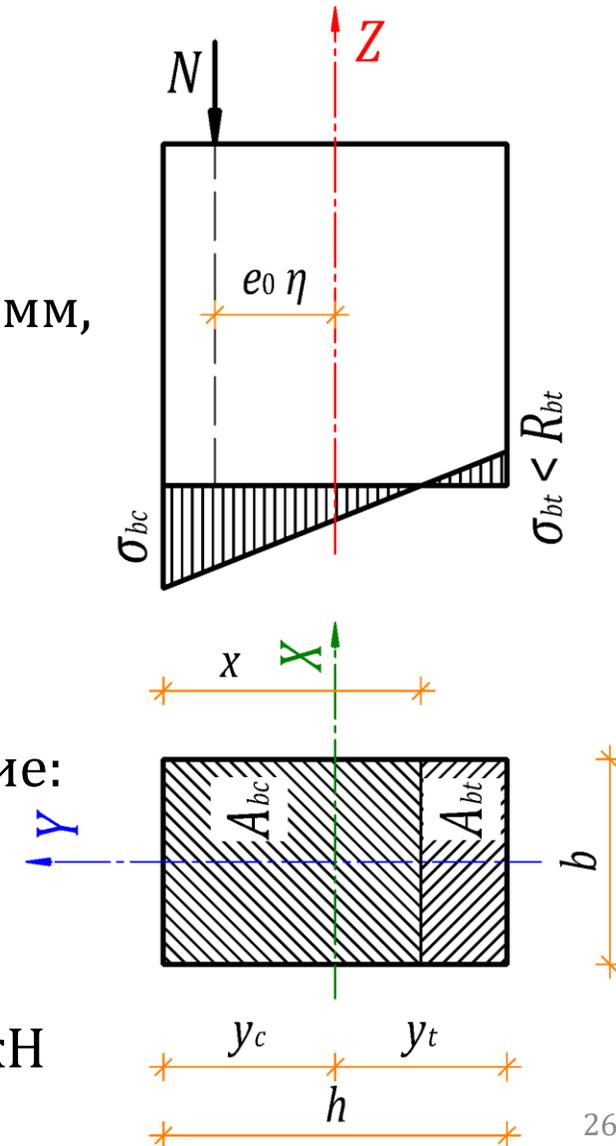
Проверяем ограничения применения альтернативного расчета:

$$e_0 = 10 \text{ мм} \leq \frac{b}{30} = 10 \text{ мм} \text{ и } l_0 = 3000 \text{ мм} \leq 20b = 6000 \text{ мм}$$

находим коэффициент φ для полной нагрузки и проверяем условие:

$$\frac{l_0}{b} = \frac{3000}{300} = 10 \rightarrow \varphi = 0,9$$

$$N = 550 \text{ кН} \leq \varphi R_b A \gamma_{b2} \gamma_{b3} = 0,9 \cdot 8500 \cdot 0,15 \cdot 0,9 \cdot 0,85 = 877 \text{ кН}$$



Расчет при косом внецентренном сжатии

Без учета растянутого бетона выполняется по формуле:

$$N \leq R_b A_b,$$

где N – действующая продольная сила;

A_b – площадь сжатой зоны бетона для прямоугольного сечения с учетом прогиба:

$$A_b = bh \left(1 - \frac{2e_{0y}\eta_y}{h} \right) \left(1 - \frac{2e_{0x}\eta_x}{b} \right) = (h - 2e_{0y}\eta_y)(b - 2e_{0x}\eta_x)$$

$e_{0x} = \frac{M_y}{N}$ и $e_{0y} = \frac{M_x}{N}$ – эксцентриситеты силы N вдоль осей X и Y ;

$e_0 \geq e_a$ – случайный эксцентриситет не менее:

$1/600l$ или $1/30h$ или $1/30b$ или 10 мм;

η_x и η_y – коэффициенты учета прогиба для каждого направления

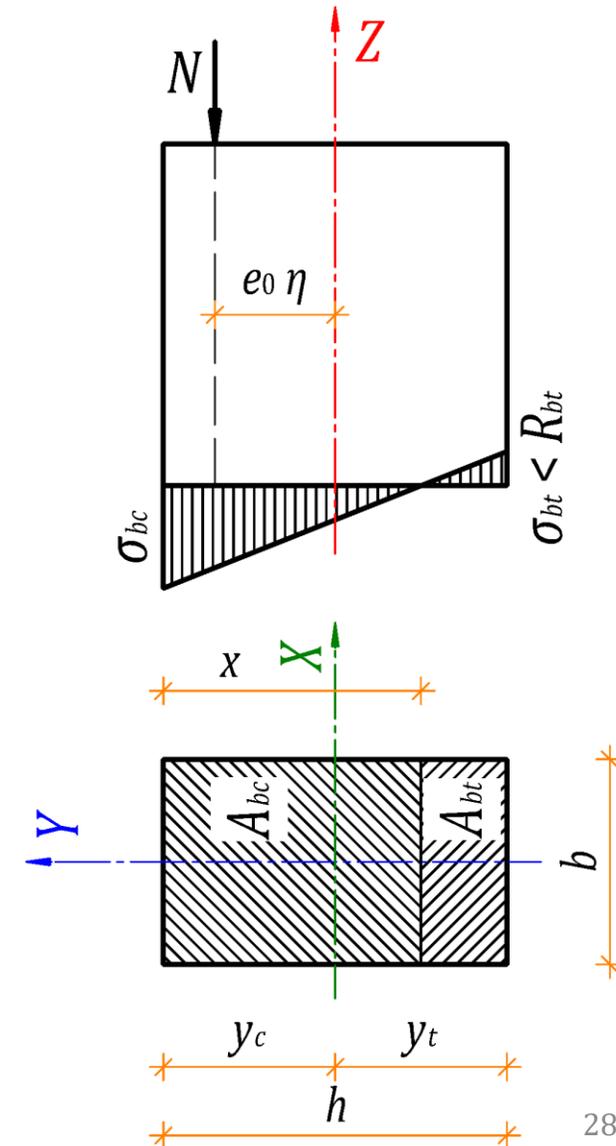
При недопущении трещин (п. 5.2.4, 7.1.3, 7.1.9 СП 63)

В элементах по условиям эксплуатации дополнительно должно выполняться условие:

$$N \leq \frac{R_{bt}A}{\frac{A}{I} y_t e_0 \eta - 1},$$

которое для прямоугольных сечений при $y_t = h/2$, $A = bh$ и $I = \frac{bh^3}{12}$ преобразуется к виду:

$$N \leq \frac{R_{bt}bh}{\frac{6}{h} e_0 \eta - 1}$$



Пример 3. Бетонная колонна при недопущении трещин

Дано: монолитная бетонная колонна из Примера 1, бетон класса В15 ($E_b = 24000$ МПа, $R_b = 8,5$ МПа, $R_{bt} = 0,75$ МПа), $e_0 = 100$ мм, $\eta = 1,04$

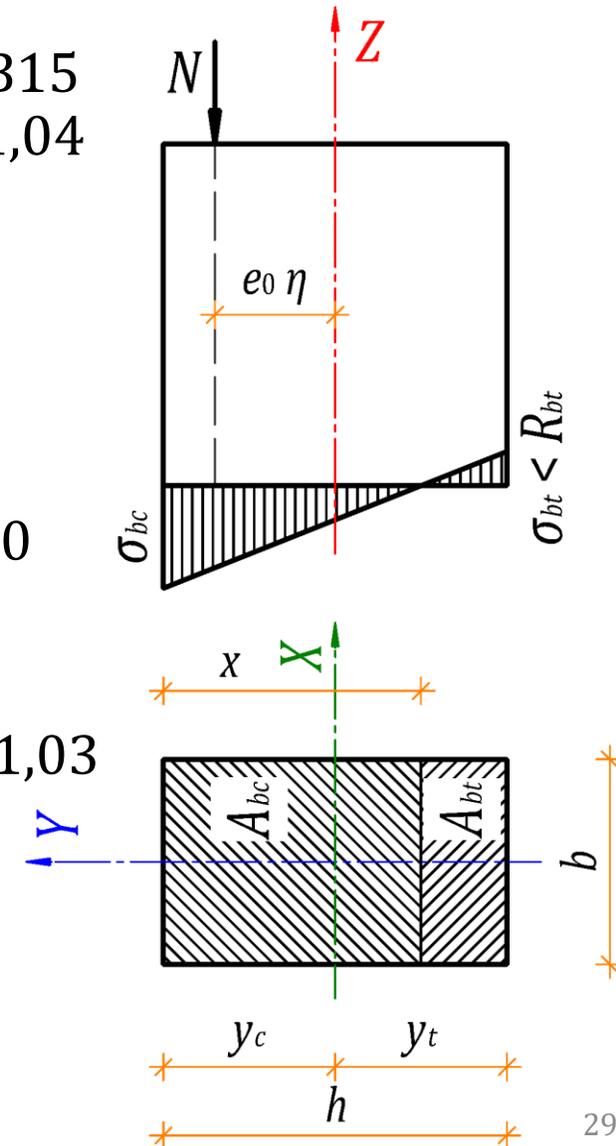
Проверяем выполнение условия:

$$N = 550 \text{ кН} > \frac{R_{bt} b h \gamma_{b3}}{\frac{6}{h} e_0 \eta - 1} = \frac{750 \cdot 0,3 \cdot 0,5 \cdot 0,85}{\frac{6}{0,5} \cdot 0,1 \cdot 1,04 - 1} = 385 \text{ кН}$$

Требуется увеличить сечение или класс бетона до В25 ($E_b = 30000$ МПа, $R_b = 14,5$ МПа, $R_{bt} = 1,05$ МПа), тогда:

$$N_{cr} = \frac{\pi^2 k_b E_b I}{l_0^2} = 17460 \text{ кН} \quad \text{и} \quad \eta = \frac{1}{1 - 550/17460} = \frac{1}{1 - 0,032} = 1,03$$

$$N = 550 \text{ кН} \leq \frac{R_{bt} b h \gamma_{b3}}{\frac{6}{h} e_0 \eta - 1} = \frac{1050 \cdot 0,3 \cdot 0,5 \cdot 0,85}{\frac{6}{0,5} \cdot 0,1 \cdot 1,03 - 1} = 567 \text{ кН}$$



Расчет бетонных элементов (п. 5.2.5, 7.1.12 СП 63)

С учетом сопротивления бетона растянутой зоны в опасных нормальных сечениях по предельным усилиям:

- В случае поперечного **изгиба** или **внецентренного сжатия** при значениях **эксцентриситета** продольной силы, превышающих **0,9** расстояния от **центра тяжести** сечения до **наиболее сжатой грани** или равных данному эксцентриситету при недопущении образования трещин в бетоне
- При этом предельное усилие, которое может быть воспринято сечением элемента, определяют как для **упругого тела** при максимальных **растягивающих напряжениях**, равных расчетному сопротивлению бетона **растяжению** R_{bt}

Расчет при поперечном изгибе (п. 5.2.5, 7.1.12 СП 63)

На действие момента выполняется из условия:

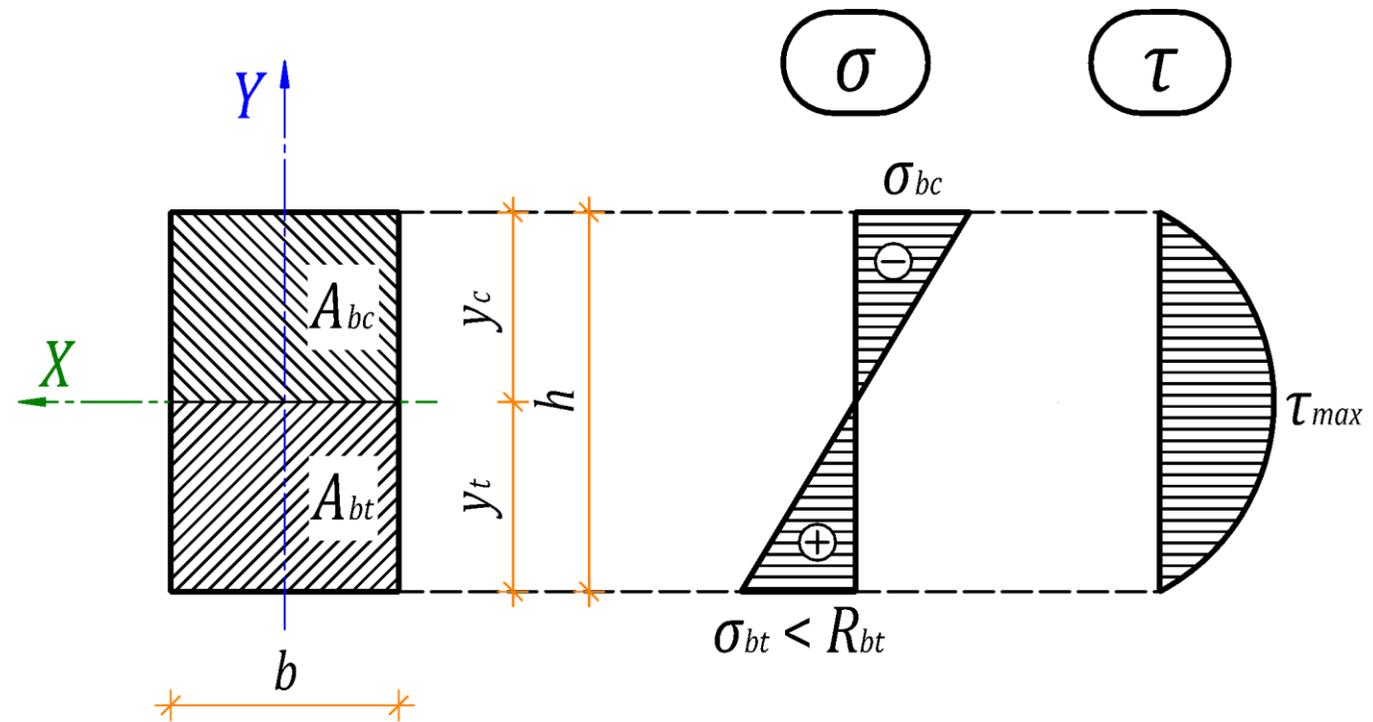
$$M \leq R_{bt} W_{bt},$$

где M – изгибающий момент от внешней нагрузки;

W_{bt} – момент сопротивления сечения элемента для крайнего растянутого волокна

В случае элементов прямоугольного сечения:

$$W_{bt} = \frac{bh^2}{6}$$



Пример 4. Бетонная балка на действие изгибающего момента

Дано: монолитная бетонная балка сечением $b \times h - 300 \times 500$ мм пролетом $l = 3,0$ м, бетон класса В25 ($E_b = 30000$ МПа, $R_b = 14,5$ МПа, $R_{bt} = 1,05$ МПа), полная нагрузка $P_Y = 10$ кН, в том числе постоянная и длительная нагрузка $P_{Yl} = 8$ кН, приложенная на расстоянии $l_P = 1,0$ м от опор, шарнирные узлы сопряжения, радиусы инерции $i_y = 144$ мм и $i_x = 87$ мм, радиусы ядра сечения $\rho_y = 83$ мм и $\rho_x = 50$ мм, момент инерции относительно оси $X - I_x = 3125 \cdot 10^{-6}$ м

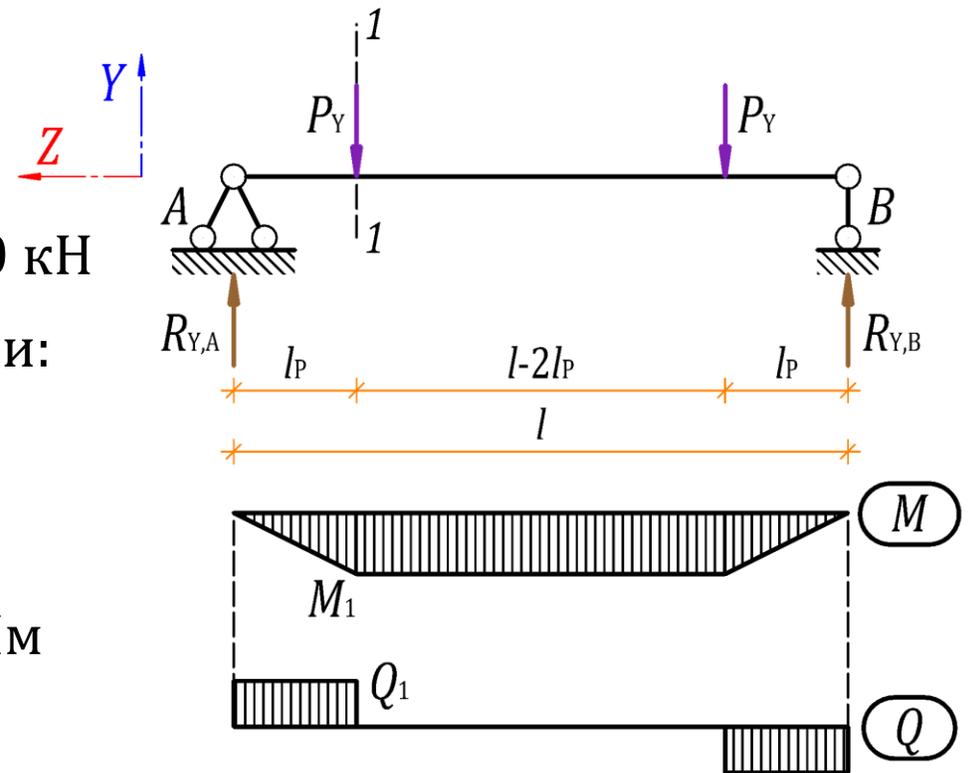
Определим внутренние усилия M_1 и Q_1 методом сечений:

$$M_1 = R_{Y,A} l_P = 10 \cdot 1 = 10 \text{ кНм} \text{ и } Q_1 = R_{Y,A} = P_Y = 10 \text{ кН}$$

Вычислим момент сопротивления растянутой грани:

$$W_{bt} = \frac{bh^2}{6} = \frac{0,3 \cdot 0,5^2}{6} = 0,0125 \text{ м}^3$$

$$M_1 = 10 \text{ кНм} \leq R_{bt} W_{bt} = 1050 \cdot 0,0125 = 13,1 \text{ кНм}$$



Пример 4. Нормальные и касательные напряжения

Достигают максимумов на крайних и среднем волокнах соответственно:

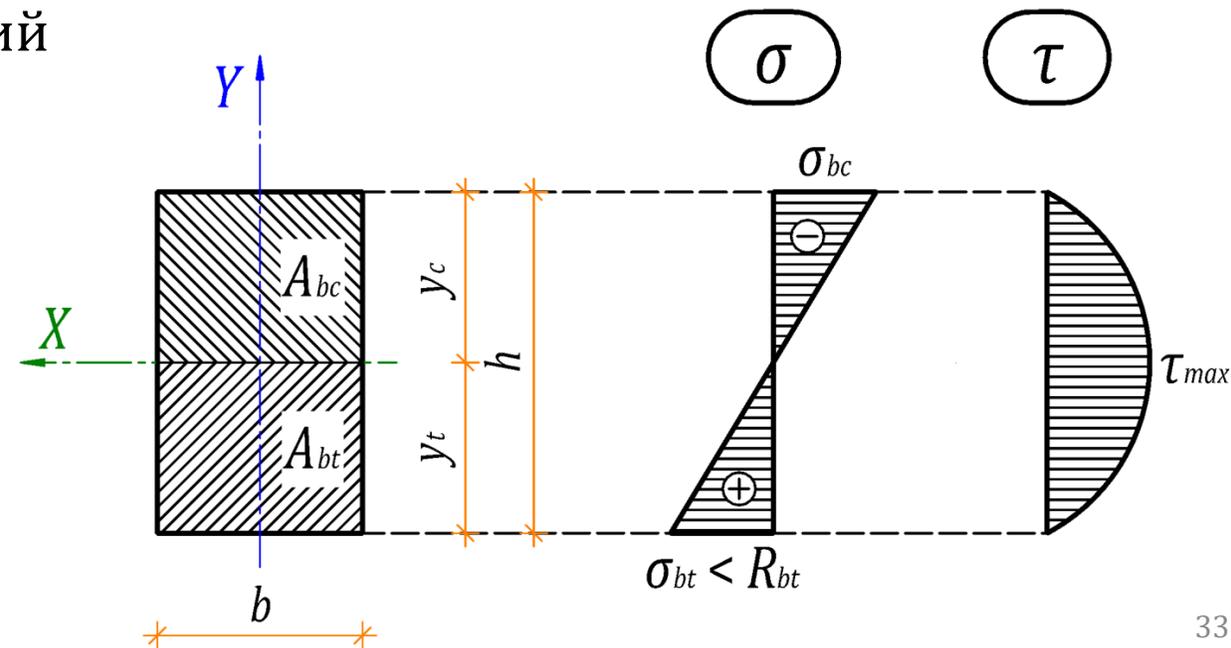
$$\sigma_{max} = \pm \frac{M_x y}{I_x} = \pm \frac{M_x h}{2I_x} = \pm \frac{6M_x}{bh^2} = \pm \frac{6 \cdot 10}{0,3 \cdot 0,5^2} = \mathbf{800 \text{ кПа}}$$

$$\tau_{max} = \frac{Q_y S_x^{отс}}{I_x b} = \frac{12Q_y b h^2}{8b^2 h^3} = \frac{3Q_y}{2bh} = \frac{3 \cdot 10}{2 \cdot 0,3 \cdot 0,5} = \mathbf{100 \text{ кПа}}$$

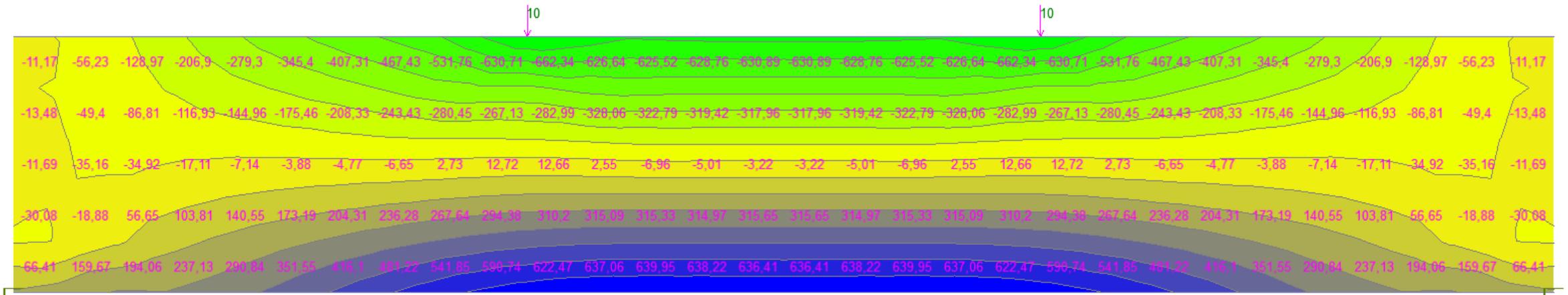
где $M_x = 10$ кНм и $Q_y = 10$ кН – изгибающий момент и поперечная сила;

$S_x^{отс}$ и I_x – статический момент отсекаемой части и момент инерции:

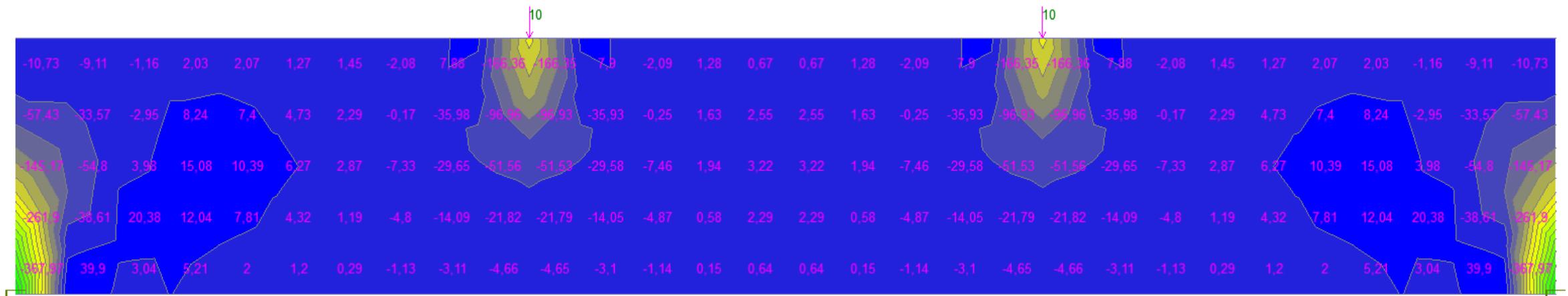
$$S_x^{отс} = \frac{bh^2}{8} \quad \text{и} \quad I_x = \frac{bh^3}{12}$$



Пример 4. Плоская задача (ПЗ). Нормальные напряжения

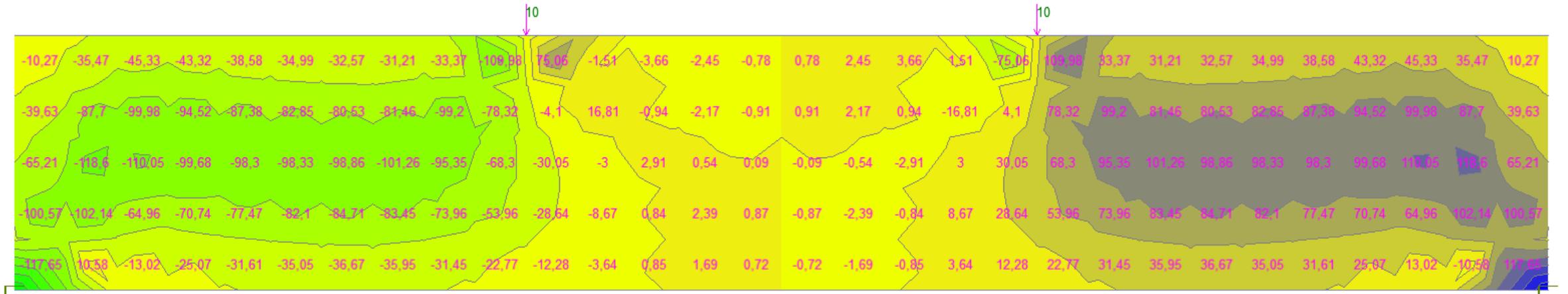


Продольные нормальные напряжения

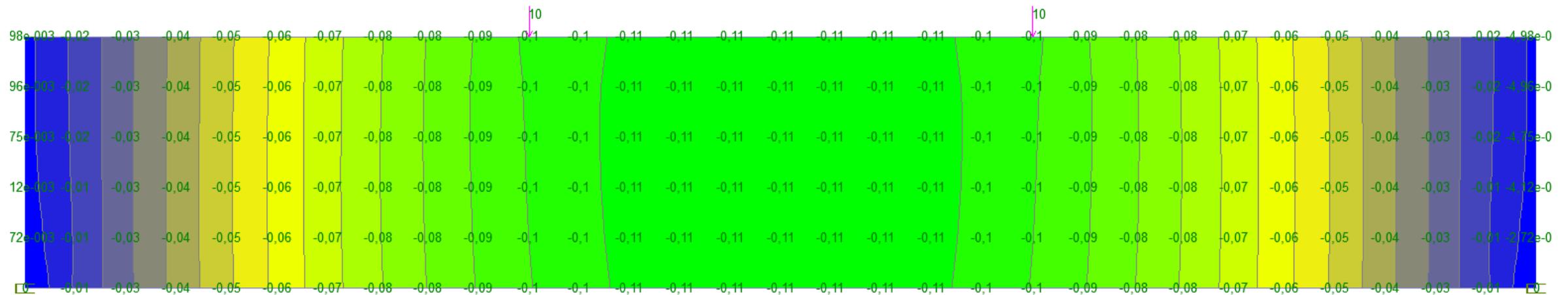


Поперечные нормальные напряжения

Пример 4. ПЗ. Касательные напряжения и перемещения



Касательные напряжения



Вертикальные перемещения (прогибы)

Расчет при поперечном изгибе (п. 7.1.1, 7.1.4 СП 63)

На действие поперечных сил выполняется из условия:

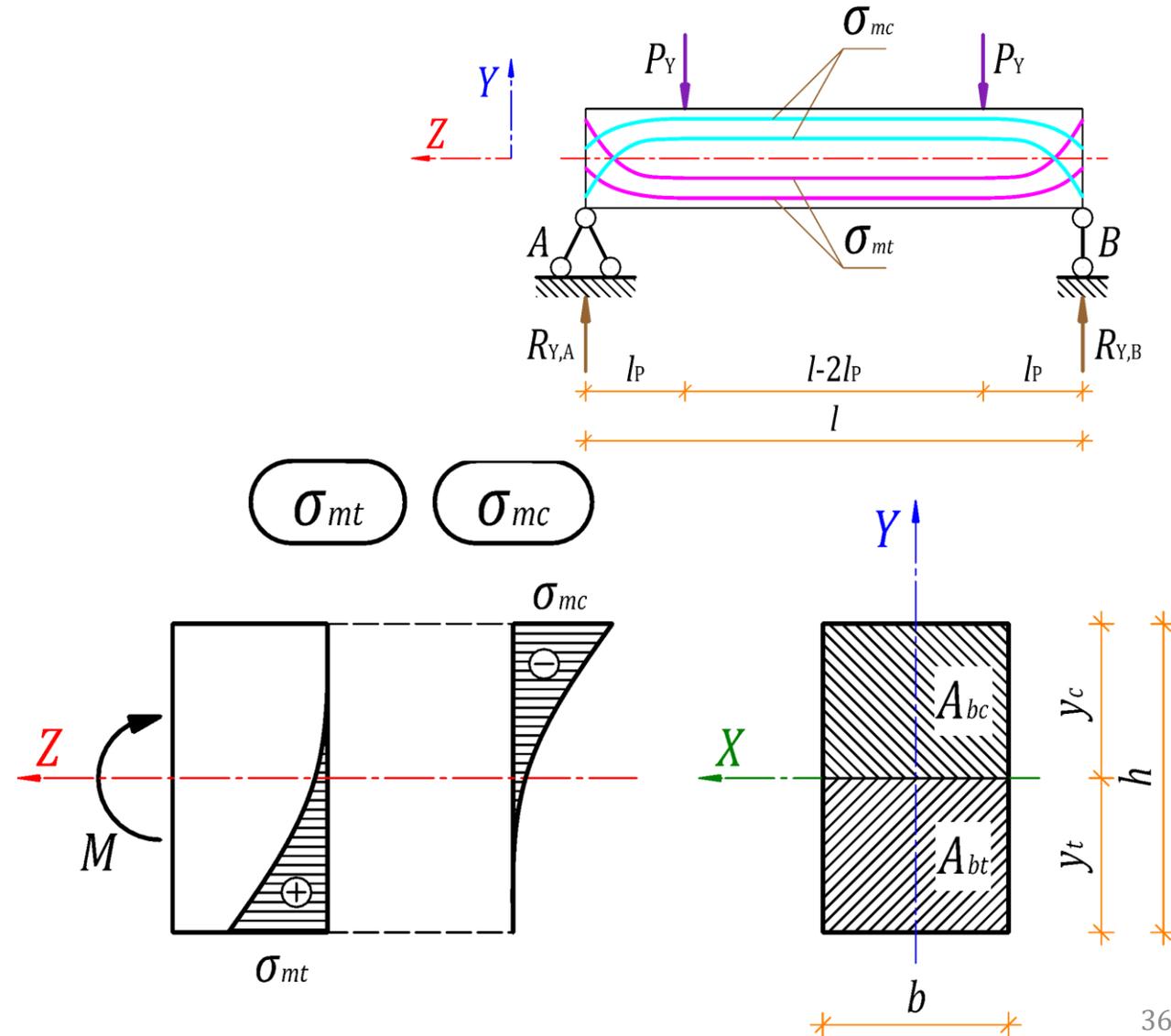
$$\frac{\sigma_{mt}}{R_{bt}} + \frac{|\sigma_{mc}|}{R_b} \leq 1,$$

где σ_{mt} и σ_{mc} – главные растягивающие и сжимающие напряжения соответственно:

$$\sigma_{mt} = \frac{\sigma}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$$

$$\sigma_{mc} = \frac{\sigma}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$$

σ и τ – нормальные и касательные напряжения соответственно



Пример 5. Бетонная балка на действие поперечных сил

Дано: монолитная бетонная балка из Примера 4, бетон класса В25 ($E_b = 30000$ МПа, $R_b = 14,5$ МПа, $R_{bt} = 1,05$ МПа)

Определим главные растягивающие и сжимающие напряжения в опорной зоне вблизи внешней силы P_y по середине высоты поперечного сечения:

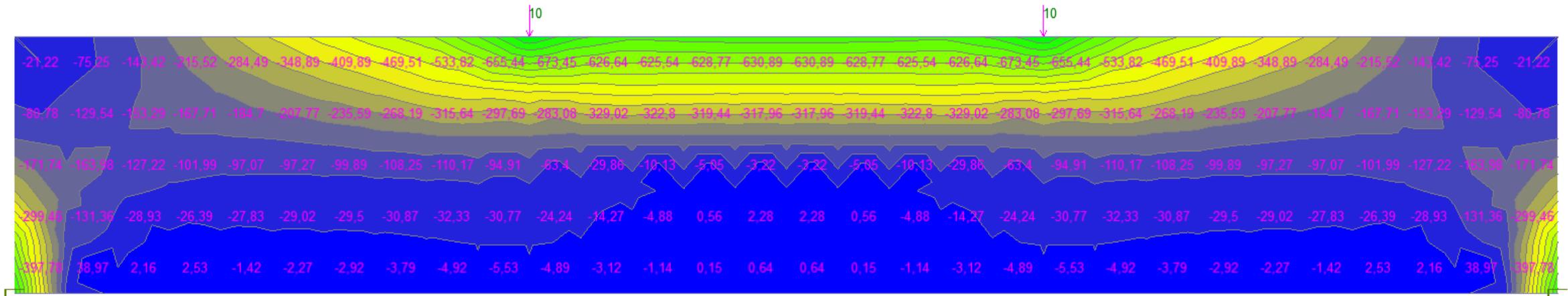
$$\sigma_{mt} = \frac{\sigma}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \frac{0}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{0^2 + 4\tau_{max}^2} = \tau_{max} = \frac{3Q_y}{2bh} = \frac{3 \cdot 10}{2 \cdot 0,3 \cdot 0,5} = 100 \text{ кПа}$$

$$\sigma_{mc} = \frac{\sigma}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \frac{0}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{0^2 + 4\tau_{max}^2} = -\tau_{max} = -\frac{3Q_y}{2bh} = -100 \text{ кПа}$$

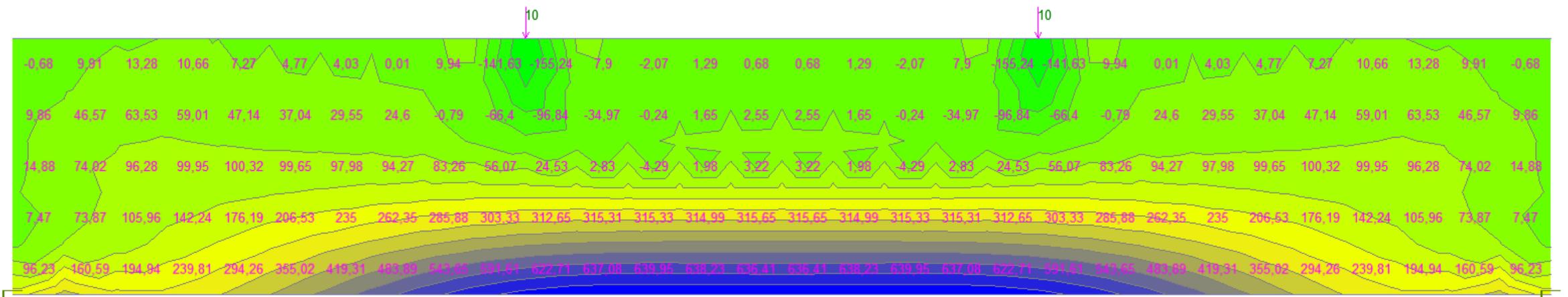
Проверим условие прочности по середине высоты поперечного сечения:

$$\frac{\sigma_{mt}}{R_{bt}} + \frac{|\sigma_{mc}|}{R_b} = \frac{100}{1050} + \frac{|-100|}{14500} = \mathbf{0,1 \leq 1}$$

Пример 4. ПЗ. Главные напряжения



Главные сжимающие напряжения



Главные растягивающие напряжения

Пример 5. При нагрузке P_Y на верхнюю грань балки

Дано: монолитная бетонная балка из Примера 4, бетон класса В25 ($E_b = 30000$ МПа, $R_b = 14,5$ МПа, $R_{bt} = 1,05$ МПа)

Определим главные растягивающие и сжимающие напряжения в опорной зоне вблизи внешней силы P_Y и верхней грани поперечного сечения:

$$\sigma_{mt} = \frac{\sigma}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \frac{-800}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(-800)^2 + 4 \cdot \left(\frac{10}{0,3 \cdot 0,1}\right)^2} = 121 \text{ кПа}$$

$$\sigma_{mc} = \frac{\sigma}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \frac{-800}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(-800)^2 + 4 \cdot \left(\frac{10}{0,3 \cdot 0,1}\right)^2} = -921 \text{ кПа}$$

Проверим условие прочности на верхней грани поперечного сечения:

$$\frac{\sigma_{mt}}{R_{bt}} + \frac{|\sigma_{mc}|}{R_b} = \frac{121}{1050} + \frac{|-921|}{14500} = \mathbf{0,18} \leq \mathbf{1}$$

Пример 5. При нагрузке P_Y на нижнюю грань балки

Дано: монолитная бетонная балка из Примера 4, бетон класса В25 ($E_b = 30000$ МПа, $R_b = 14,5$ МПа, $R_{bt} = 1,05$ МПа)

Определим главные растягивающие и сжимающие напряжения в опорной зоне вблизи внешней силы P_Y и нижней грани поперечного сечения:

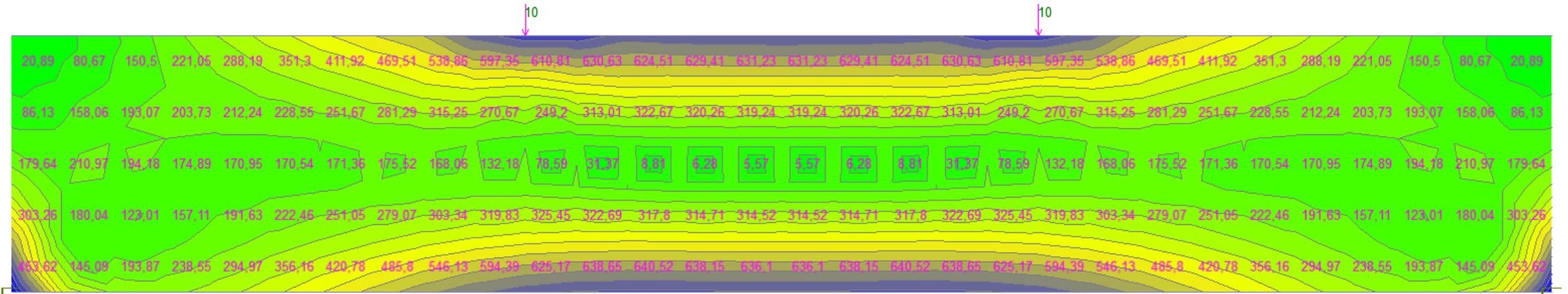
$$\sigma_{mt} = \frac{\sigma}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \frac{800}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{800^2 + 4 \left(\frac{10}{0,3 \cdot 0,1} \right)^2} = 921 \text{ кПа}$$

$$\sigma_{mc} = \frac{\sigma}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \frac{800}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{800^2 + 4 \left(\frac{10}{0,3 \cdot 0,1} \right)^2} = -121 \text{ кПа}$$

Проверим условие прочности на верхней грани поперечного сечения:

$$\frac{\sigma_{mt}}{R_{bt}} + \frac{|\sigma_{mc}|}{R_b} = \frac{921}{1050} + \frac{|-121|}{14500} = \mathbf{0,89} \leq \mathbf{1}$$

Пример 4. ПЗ. Эквивалентные напряжения



Эквивалентные напряжения на основе Энергетической (четвертой) теории прочности

Литература:

- ГОСТ 7473-2010 Смеси бетонные
- ГОСТ 26633-2012 Бетоны тяжелые и мелкозернистые
- СП 63.13330.2018 Бетонные и железобетонные конструкции
- Гениев Г.А., Киссюк В.Н., Тюпин В.А. Теория пластичности бетона и железобетона. – М.: Стройиздат, 1974. – 316 с.
- Байков В.Н., Сигалов Э.Е. Железобетонные конструкции. Общий курс. 5-е издание, перер. и доп. – М.: Стройиздат, 1991. – 767 с.
- Кумпяк О. Г., Самсонов В. С., Галяутдинов З. Р., Пахмурин О. Р. Железобетонные и каменные конструкции. – М.: Издательство АСВ, 2014. – 672 с.

ИФО | 01.03.04 | ПМ | 6-й семестр

Строительные конструкции

Лекция №18



НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ

**СТРОИТЕЛЬНЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ**

www: mgsu.ru/universityabout/Struktura/Kafedri/ZhBK/

e-mail: gbk@mgsu.ru; dpekin@mail.ru

тел.: +7 495 287 49 14 доб. 3036, 3084

Пекин Дмитрий Анатольевич, доцент, к.т.н.