

ИФО | 01.03.04 | ПМ | 6-й семестр

Строительные конструкции

Лекция №11



НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ

**СТРОИТЕЛЬНЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ**

www: mgsu.ru/universityabout/Struktura/Kafedri/ZhBK/

e-mail: gbk@mgsu.ru; dpekin@mail.ru

тел.: +7 495 287 49 14 доб. 3036, 3084

Пекин Дмитрий Анатольевич, доцент, к.т.н.

Лекция №11 – Характеристики элементов

- Геометрические характеристики сечений
- Геометрические характеристики элементов
- Устойчивость равновесия центрально-сжатого стержня
- Метод сечений для определения внутренних усилий в статически определимых стержневых элементах
- Напряженное состояние стержневых элементов
- Коэффициент динамичности
- Прогибы статически определимых стержневых элементов

Геометрические характеристики сечений:

- Площадь
- Статический момент
- Центр тяжести
- Момент инерции
- Полярный момент инерции
- Момент сопротивления
- Полярный момент сопротивления

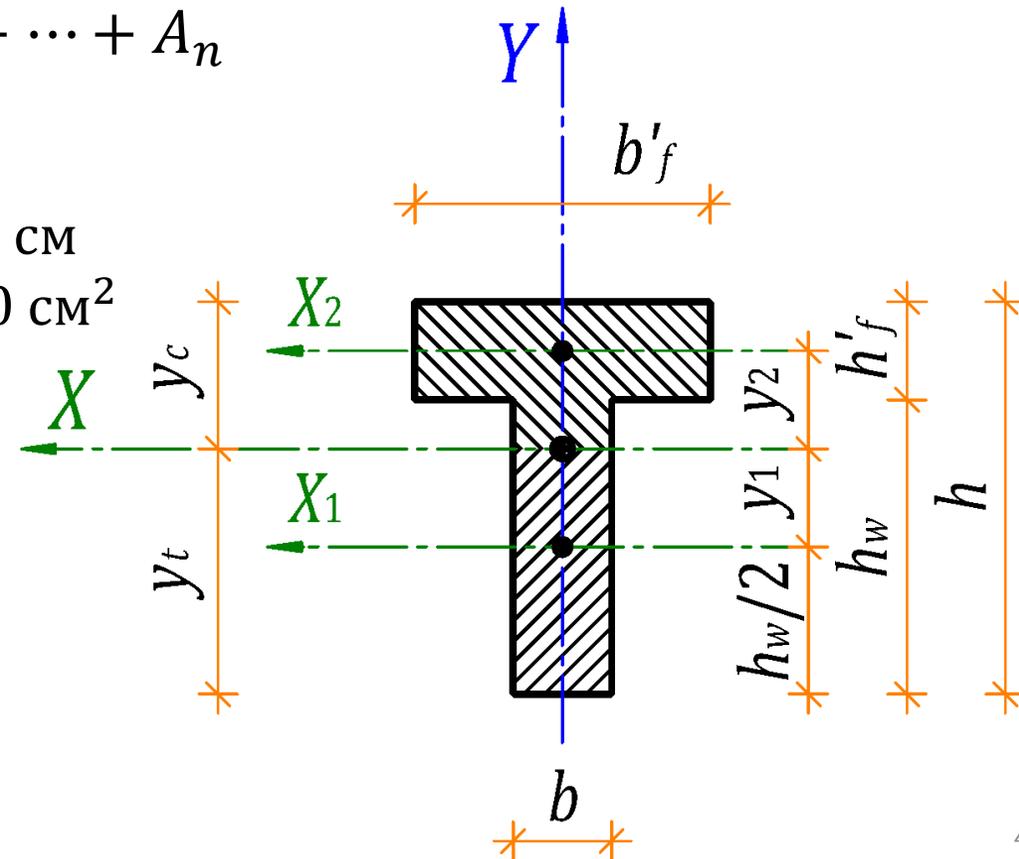
Площадь составного поперечного сечения

Простой геометрической формы определяется путем суммирования площадей отдельных фигур:

$$A = \sum_{i=1}^n A_i = A_1 + A_2 + \dots + A_n$$

Пример 1. Дано: Тавр $b = h'_f = 10$ см, $h_w = b'_f = 30$ см

$$A = A_1 + A_2 = bh_w + b'_fh'_f = 10 \cdot 30 + 30 \cdot 10 = 600 \text{ см}^2$$



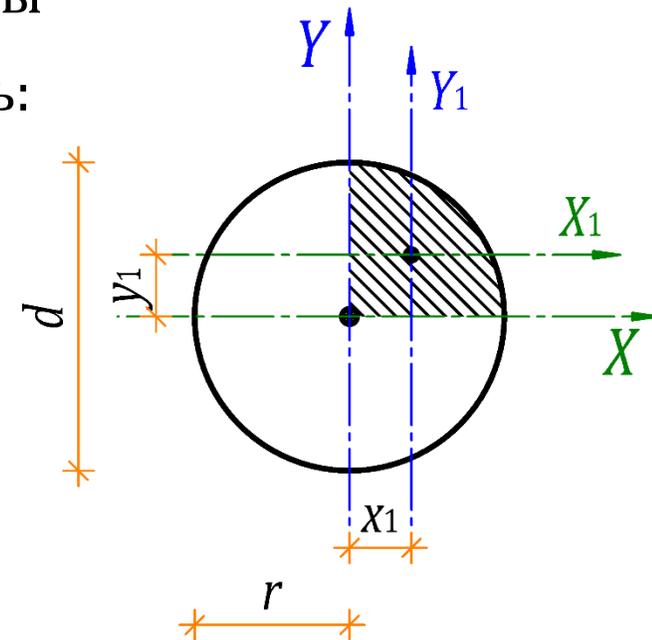
Площадь поперечного сечения

Криволинейной трапеции в декартовых и полярных координатах определяется по формулам:

$$A = \int_a^b f(x)dx \quad \text{и} \quad A = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} [r(\varphi)]^2 d\varphi$$

Пример 2. Дано: Круг радиусом $r = 5$ см, тогда с учетом формулы $x^2 + y^2 = r^2$ получим $f(x) = y = \sqrt{r^2 - x^2}$ и определим площадь:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}A &= \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{r^2 - x^2} \Big|_0^r + \frac{r^2}{2} \arcsin \frac{x}{r} \Big|_0^r = \\ &= \left(\frac{r}{2} \sqrt{r^2 - r^2} - \frac{0}{2} \sqrt{r^2 - 0^2} \right) + \frac{r^2}{2} \left(\arcsin \frac{r}{r} - \arcsin \frac{0}{r} \right) = \\ &= 0 + \frac{r^2}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi \cdot r^2}{4} \rightarrow A = \pi \cdot r^2 = 3,14 \cdot 5^2 = 78,5 \text{ см}^2 \end{aligned}$$



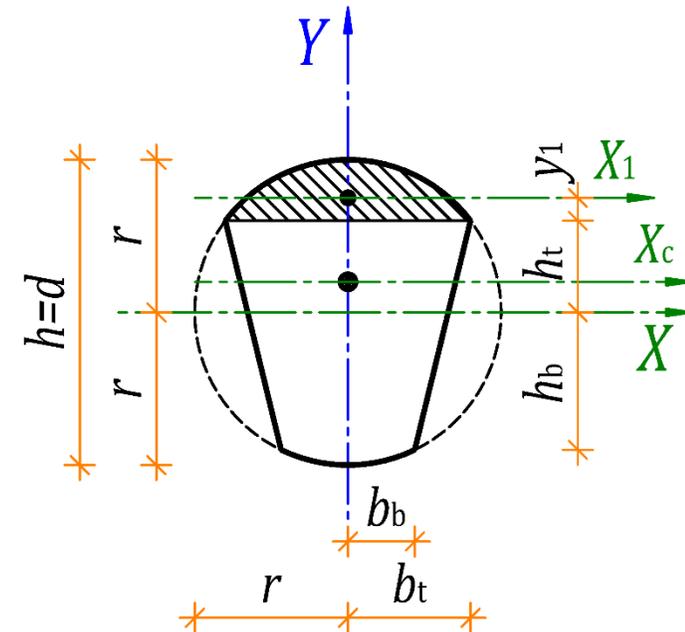
Площадь поперечного сечения

Сложной геометрической формы в декартовых координатах определяется по формуле:

$$A = \iint_A f(x, y) dx dy = \iint_A f(x, y) dA, \quad \text{где } f(x, y) = 1$$

Пример 3. Дано: Круговой сегмент радиусом $r = 5$ см и $h_t = 3$ см, тогда с учетом формулы $x^2 + y^2 = r^2$ получим $f(y) = x = \sqrt{r^2 - y^2}$ площадь:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}A &= \int_{h_t}^r \sqrt{r^2 - y^2} dy = \frac{y}{2} \sqrt{r^2 - y^2} \Big|_{h_t}^r + \frac{r^2}{2} \arcsin \frac{y}{r} \Big|_{h_t}^r = \\ &= \left(\frac{r}{2} \sqrt{r^2 - r^2} - \frac{h_t}{2} \sqrt{r^2 - h_t^2} \right) + \frac{r^2}{2} \left(\arcsin \frac{r}{r} - \arcsin \frac{h_t}{r} \right) = \\ &= \frac{r^2}{2} \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{h_t}{2} \sqrt{r^2 - h_t^2} - \frac{r^2}{2} \arcsin \frac{h_t}{r} \rightarrow \\ \rightarrow A &= \frac{\pi r^2}{2} - h_t \sqrt{r^2 - h_t^2} - r^2 \cdot \arcsin \frac{h_t}{r} = 11,2 \text{ см}^2 \end{aligned}$$



Статические моменты поперечного сечения

Простой геометрической формы из фигур с площадями A_1, \dots, A_i относительно осей X и Y определяется путем суммирования произведений этих площадей на расстояния до их центров тяжести (с учетом разных знаков относительно осей):

$$S_{xi} = \sum_{i=1}^n A_i y_i = A_1 y_1 + \dots + A_i y_i \quad \text{и} \quad S_{yi} = \sum_{i=1}^n A_i x_i = A_1 x_1 + \dots + A_i x_i$$

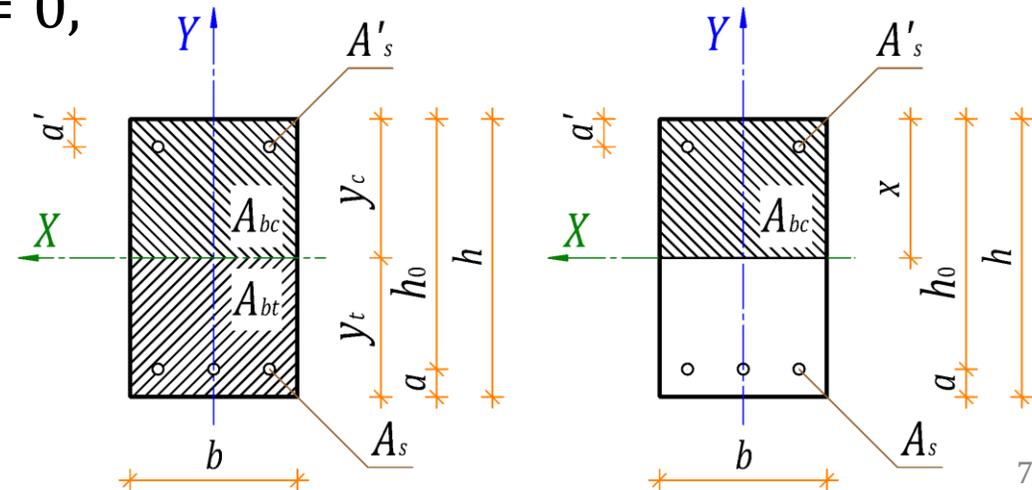
Статические моменты всего сечения A относительно **центральных** осей X и Y :

$$S_{x0} = 0 \quad \text{и} \quad S_{y0} = 0,$$

где A_i – площадь произвольной части сечения ($A_{bc}, A_{bt}, A_s, A'_s$);

$A = A_{bc} + A_{bt} = bh$ – площадь всего сечения;

x_i и y_i – расстояния от центра тяжести площади A_i до осей X и Y соответственно



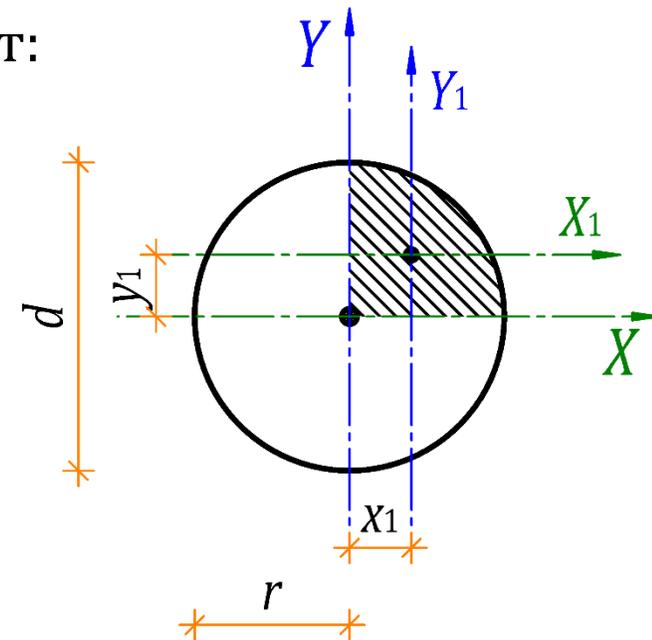
Статические моменты поперечного сечения

Криволинейной трапеции в декартовых координатах определяются по формулам (с учетом разных знаков относительно осей):

$$S_x = \frac{1}{2} \int_a^b y \cdot |y| dx \quad \text{и} \quad S_y = \int_a^b x \cdot |y| dx = \frac{1}{2} \int_\alpha^\beta x \cdot |x| dy$$

Пример 4. Дано: Четверть круга радиусом $r = 5$ см, тогда с учетом формулы $x^2 + y^2 = r^2$ получим $f(x) = y = \sqrt{r^2 - x^2}$ и статический момент:

$$\begin{aligned} S_x &= \frac{1}{2} \int_0^r (r^2 - x^2) dx = \frac{1}{2} \left(r^2 \frac{x}{1} \Big|_0^r - \frac{x^3}{3} \Big|_0^r \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(r^3 - 0 - \frac{r^3}{3} + 0 \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2r^3}{3} = \frac{r^3}{3} \rightarrow S_x = \frac{r^3}{3} = \frac{5^3}{3} = 41,7 \text{ см}^3 \end{aligned}$$



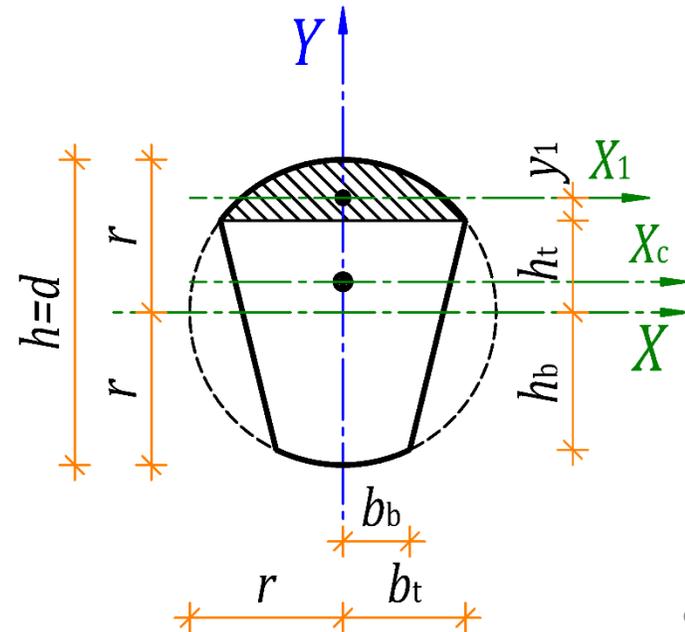
Статические моменты поперечного сечения

Сложной геометрической формы в декартовых координатах определяются по формулам:

$$S_x = \iint_A y dx dy = \iint_A y dA \quad \text{и} \quad S_y = \iint_A x dx dy = \iint_A x dA$$

Пример 5. Дано: Круговой сегмент радиусом $r = 5$ см и $h_t = 3$ см, тогда с учетом формулы $y^2 = r^2 - x^2$ статический момент относительно оси X :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} S_x &= \int_0^{b_t} \left(h_t + \frac{y}{2} \right) (y - h_t) dx = \int_0^{b_t} \left(\frac{y^2}{2} + \frac{h_t y}{2} - h_t^2 \right) dx = \\ &= \int_0^{b_t} \left(\frac{r^2 - x^2}{2} + \frac{h_t \sqrt{r^2 - x^2}}{2} - h_t^2 \right) dx = \\ &= b_t \left(\frac{r^2}{2} - h_t^2 - \frac{b_t^2}{6} \right) + \frac{h_t}{4} \left(b_t \sqrt{r^2 - b_t^2} - r^2 \arcsin \frac{b_t}{r} \right) \rightarrow \\ \rightarrow S_x &= b_t \left(r^2 - 2h_t^2 - \frac{b_t^2}{3} \right) + \frac{h_t}{2} \left(b_t \sqrt{r^2 - b_t^2} - r^2 \arcsin \frac{b_t}{r} \right) \end{aligned}$$



Центр тяжести поперечного сечения

Простой геометрической формы определяется с помощью Теоремы о моменте равнодействующем:

$$y_1 = \frac{S_{x1}}{A},$$

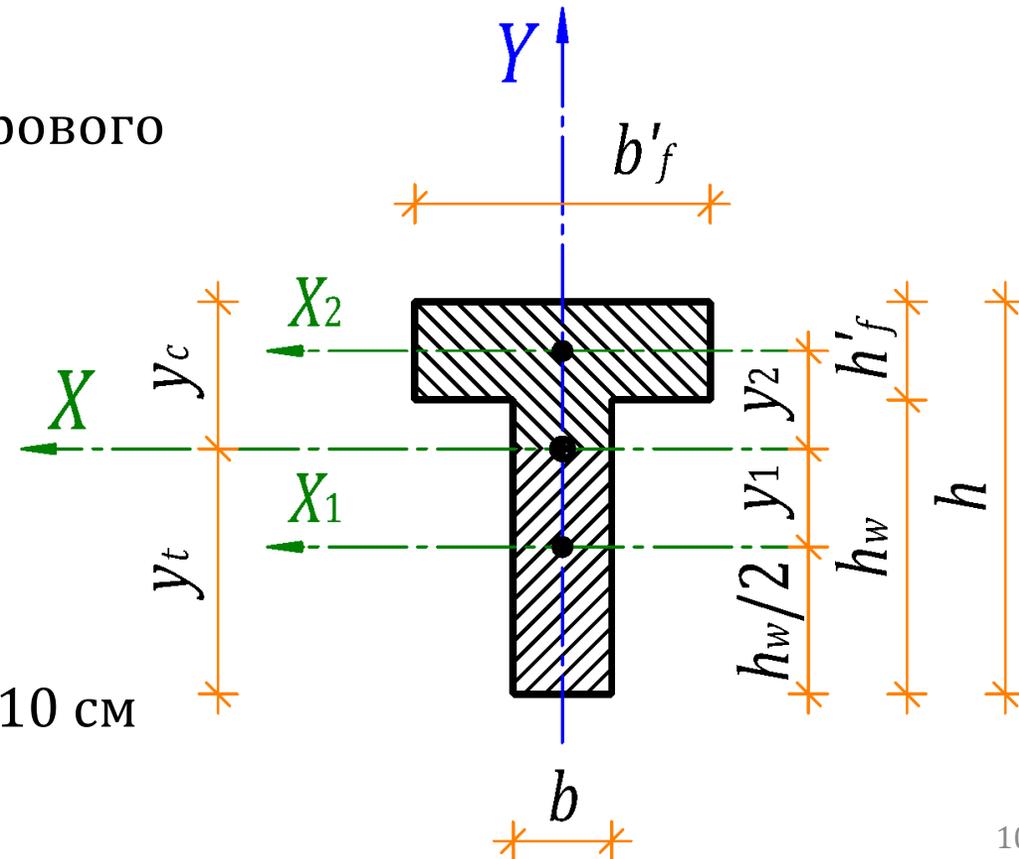
где $S_{x1} = b'_f h'_f \left(\frac{h'_f}{2} + \frac{h_w}{2} \right)$ – статический момент таврового сечения относительно вспомогательной оси X_1 ;

$A = b h_w + b'_f h'_f$ – площадь таврового сечения;

y_1 – расстояние от вспомогательной оси X_1 до центра тяжести таврового сечения

Пример 6. Дано: $b = h'_f = 10$ см; $h_w = b'_f = 30$ см

$$y_1 = \frac{S_{x1}}{A} = \frac{b'_f h'_f \left(\frac{h'_f}{2} + \frac{h_w}{2} \right)}{b h_w + b'_f h'_f} = \frac{10 \cdot 30 \cdot (5 + 15)}{10 \cdot 30 \cdot 2} = 10 \text{ см}$$



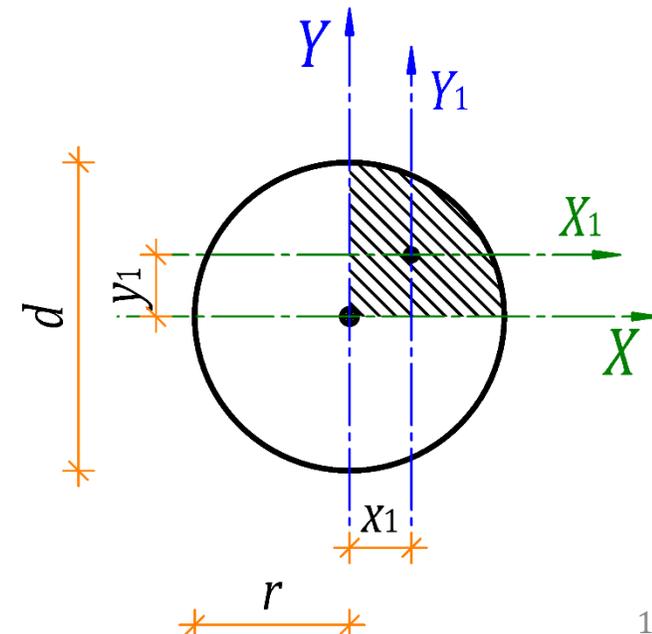
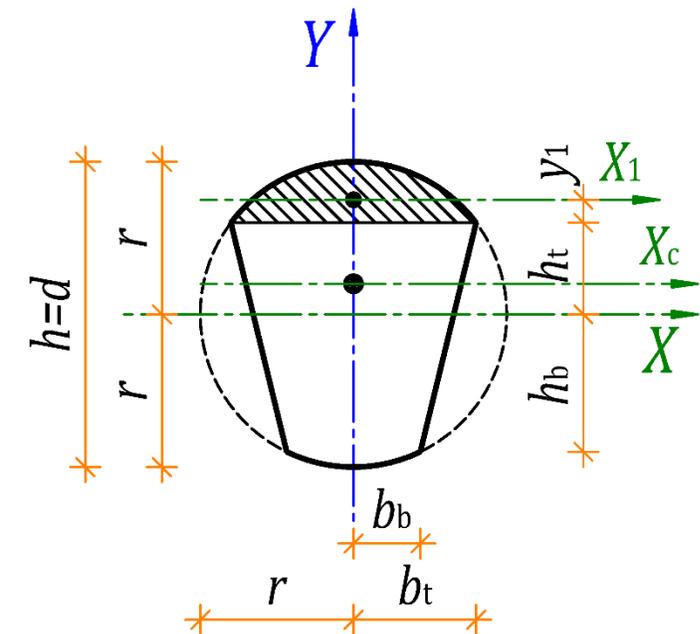
Центры тяжести поперечного сечения:

- Криволинейной трапеции определяется по формулам:

$$\bar{y} = \frac{S_x}{A} = \frac{\frac{1}{2} \int_a^b y \cdot |y| dx}{A} \quad \text{и} \quad \bar{x} = \frac{S_y}{A} = \frac{\frac{1}{2} \int_\alpha^\beta x \cdot |x| dy}{A}$$

- Сложной геометрической формы по формулам:

$$\bar{y} = \frac{S_x}{A} = \frac{\iint_A y dA}{A} \quad \text{и} \quad \bar{x} = \frac{S_y}{A} = \frac{\iint_A x dA}{A}$$



Момент инерции поперечного сечения

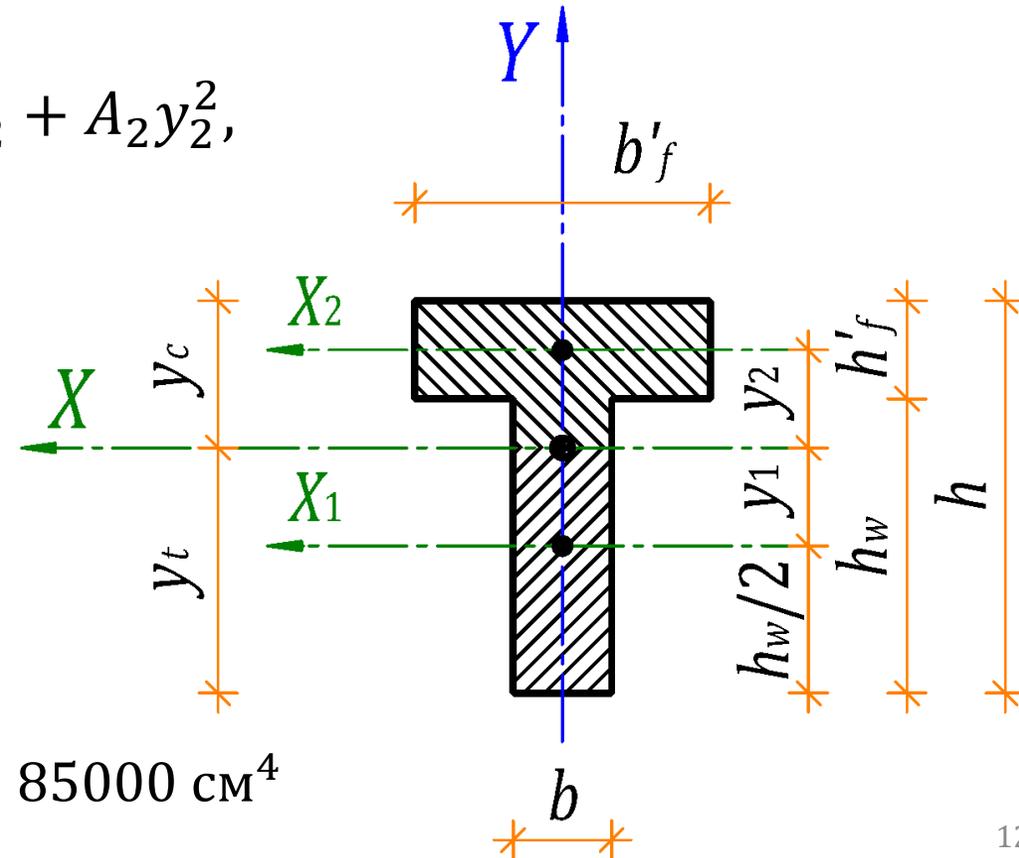
Относительно центральной оси X равен сумме моментов инерции относительно собственных осей I_{x_1} и I_{x_2} и произведений статических моментов (или площадей) $S_{x_1}(A_1)$ и $S_{x_2}(A_2)$ на расстояния (или квадраты расстояний) $y_1(y_1^2)$ и $y_2(y_2^2)$:

$$I_x = I_{x_1} + S_{x_1}y_1 + I_{x_2} + S_{x_2}y_2 = I_{x_1} + A_1y_1^2 + I_{x_2} + A_2y_2^2,$$

где $I_{x_1} = \frac{bh_w^3}{12}$ и $I_{x_2} = \frac{b'_fh_f{}^3}{12}$ – моменты инерции относительно собственных осей X_1 и X_2

Пример 7. Дано: $b = h'_f = 10$ см; $h_w = b'_f = 30$ см

$$\begin{aligned} I_x &= \frac{bh_w^3}{12} + bh_wy_1^2 + \frac{b'_fh_f{}^3}{12} + b'_fh_fy_2^2 = \\ &= \frac{10 \cdot 30^3}{12} + 10 \cdot 30 \cdot 10^2 + \frac{30 \cdot 10^3}{12} + 30 \cdot 10 \cdot 10^2 = 85000 \text{ см}^4 \end{aligned}$$



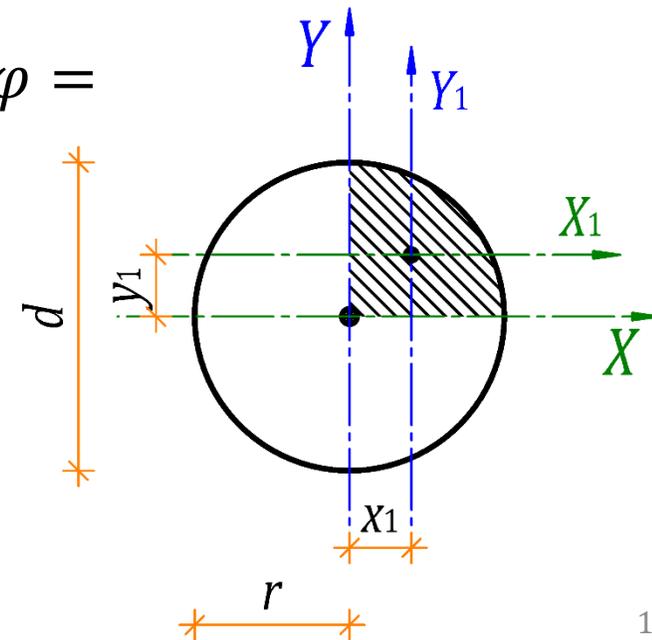
Полярный момент инерции:

- Поперечного сечения сложной геометрической формы определяется по формуле:

$$I_p = \iint_A r^2 dA$$

- Полярный момент инерции круга определяется по формуле:

$$\begin{aligned} I_p &= \iint_A r^2 dA = \iint_A r^2 \cdot dr(r \cdot d\varphi) = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^R r^3 dr \right) d\varphi = \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{R^4}{4} d\varphi = \frac{R^4}{4} \varphi \Big|_0^{2\pi} = \frac{2\pi \cdot R^4}{4} = \frac{\pi R^4}{2} \end{aligned}$$



Моменты инерции поперечного сечения:

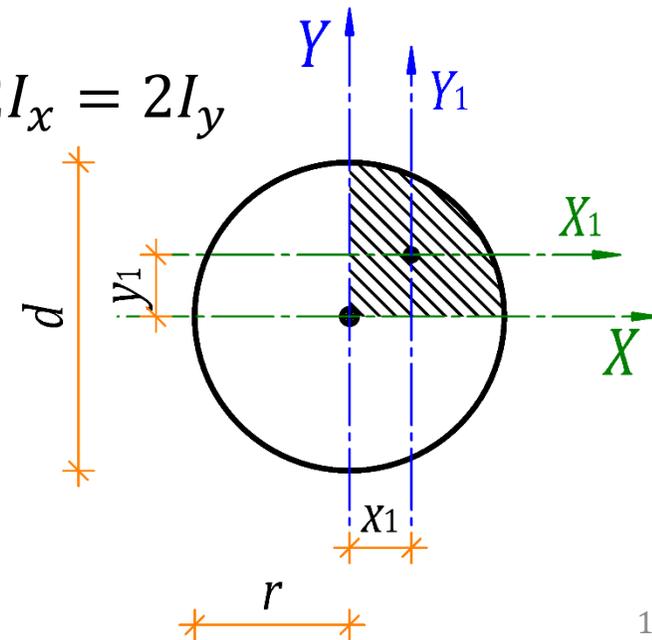
- Сложной геометрической формы в декартовых координатах определяются по формулам:

$$I_x = \iint_A y^2 dA \quad \text{и} \quad I_y = \iint_A x^2 dA$$

- Момент инерции круга в декартовых координатах определяется на основе полярного момента инерции по формуле:

$$I_p = \iint_A r^2 dA = \iint_A (x^2 + y^2) dA = \iint_A y^2 dA + \iint_A x^2 dA = 2I_x = 2I_y$$

$$I_x = I_y = \frac{I_p}{2} = \frac{\pi R^4}{2 \cdot 2} = \frac{\pi R^4}{4}$$

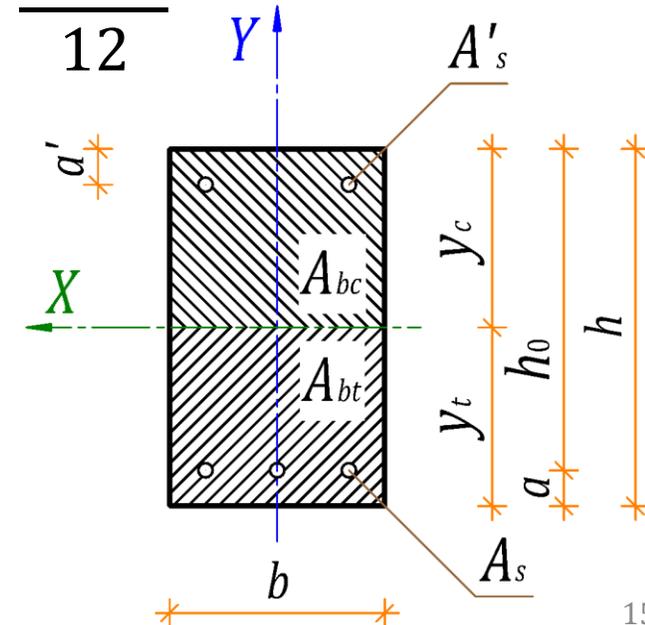


Моменты инерции прямоугольного сечения

В декартовых координатах определяются по аналогичным формулам:

$$I_x = \iint_A y^2 dA = \int_{-b/2}^{+b/2} \left(\int_{-h/2}^{+h/2} y^2 dy \right) dx = \frac{h^3}{12} \int_{-b/2}^{+b/2} dx = \frac{b \cdot h^3}{12}$$

$$I_y = \iint_A x^2 dA = \int_{-h/2}^{+h/2} \left(\int_{-b/2}^{+b/2} x^2 dx \right) dy = \frac{b^3}{12} \int_{-h/2}^{+h/2} dy = \frac{h \cdot b^3}{12}$$



Моменты сопротивления крайних волокон

Относительно центральной оси X равны отношению момента инерции I_x к расстояниям до центра тяжести сечения y_c и y_t :

$$W_{x,c} = \frac{I_x}{y_c} \quad \text{и} \quad W_{x,t} = \frac{I_x}{y_t},$$

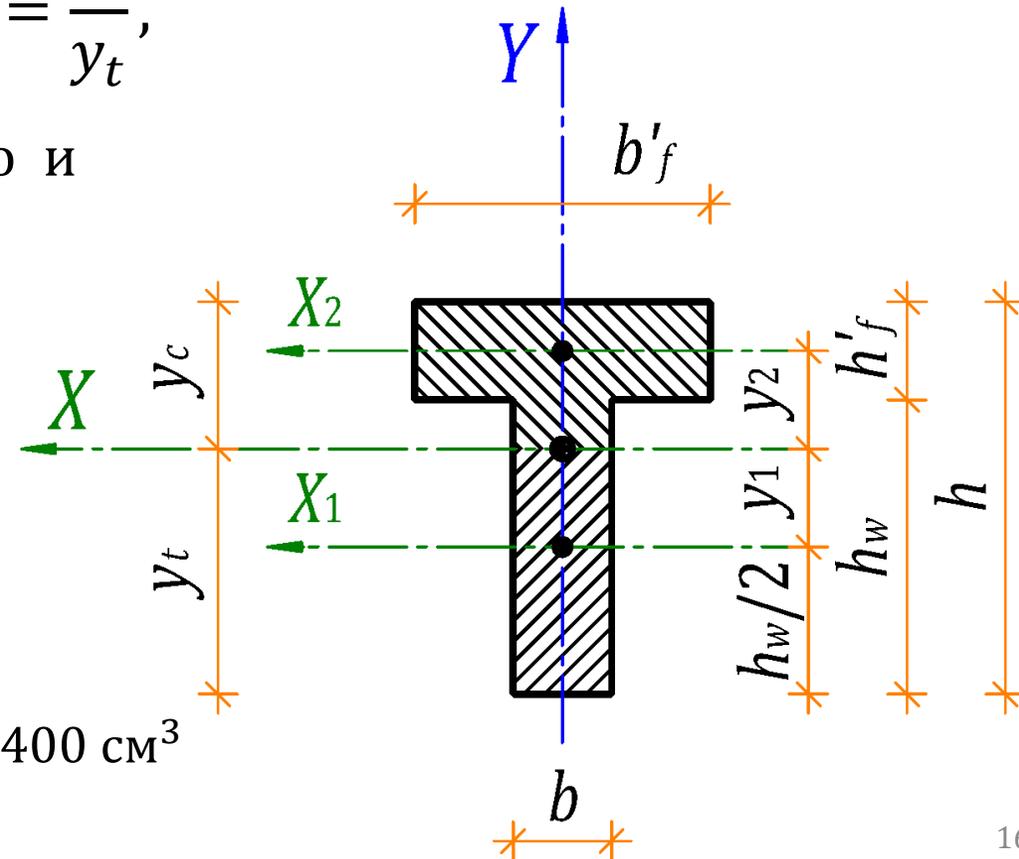
где $W_{x,c}$ и $W_{x,t}$ – моменты сопротивления верхнего и нижнего волокон сечения, соответственно;

$$W_x = \frac{I_x}{h/2} = \frac{bh^3/12}{h/2} = \frac{bh^2}{6} \text{ – прямоугольного сечения;}$$

y_c и y_t – расстояние от центра тяжести сечения до верхней и нижней грани соответственно

Пример 8. Дано: $b = h'_f = 10$ см; $h_w = b'_f = 30$ см

$$W_{x,c} = \frac{I_x}{y_c} = \frac{85000}{15} = 5666,7 \text{ см}^3 \quad \text{и} \quad W_{x,t} = \frac{I_x}{y_t} = \frac{85000}{25} = 3400 \text{ см}^3$$



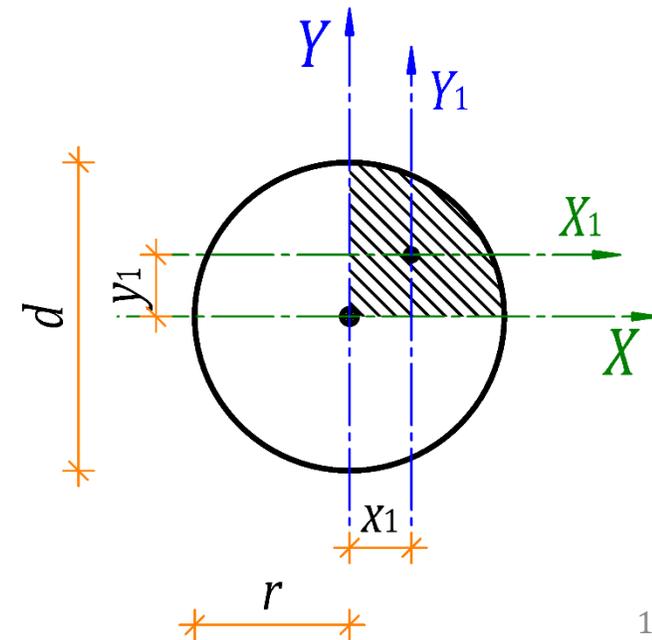
Полярный момент сопротивления

Полярный момент инерции круга определяется по формуле:

$$\begin{aligned} I_p &= \iint_A r^2 dA = \iint_A r^2 \cdot dr(r \cdot d\varphi) = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^R r^3 dr \right) d\varphi = \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{R^4}{4} d\varphi = \frac{R^4}{4} \varphi \Big|_0^{2\pi} = \frac{2\pi \cdot R^4}{4} = \frac{\pi R^4}{2} \end{aligned}$$

Полярный момент сопротивления круга:

$$W_p = \frac{I_p}{R} = \frac{\pi R^4}{2R} = \frac{\pi R^3}{2}$$



Геометрические характеристики элементов:

- Радиус инерции
- Полярный радиус инерции
- Ядровое расстояние
- Гибкость стержневых элементов
- Расчетные длины изгибаемых стержневых элементов

Радиусы инерции:

От центра тяжести вдоль осей X и Y равны квадратному корню из отношения моментов инерции I_x и I_y к площади сечения A :

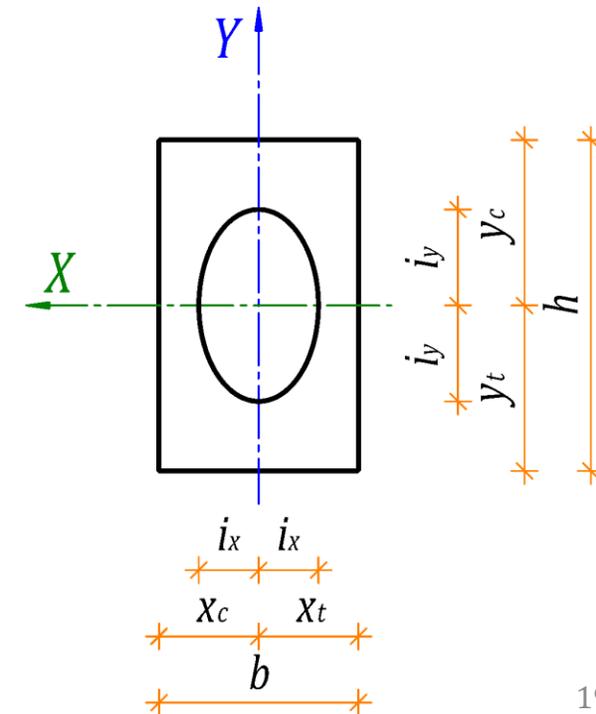
$$i_y = \sqrt{\frac{I_x}{A}} \quad \text{и} \quad i_x = \sqrt{\frac{I_y}{A}},$$

где I_x и I_y – моменты инерции сечения относительно осей X и Y соответственно;

A – площадь сечения

Пример 9. Дано: $b = 30$ см; $h = 50$ см

$$i_y = \sqrt{\frac{I_x}{A}} = \sqrt{\frac{312500}{1500}} = 14,4 \text{ см} \quad \text{и} \quad i_x = \sqrt{\frac{I_y}{A}} = \sqrt{\frac{112500}{1500}} = 8,7 \text{ см}$$



Полярный радиус инерции

От центра тяжести также равен квадратному корню из отношения полярного момента инерции I_p к площади сечения A :

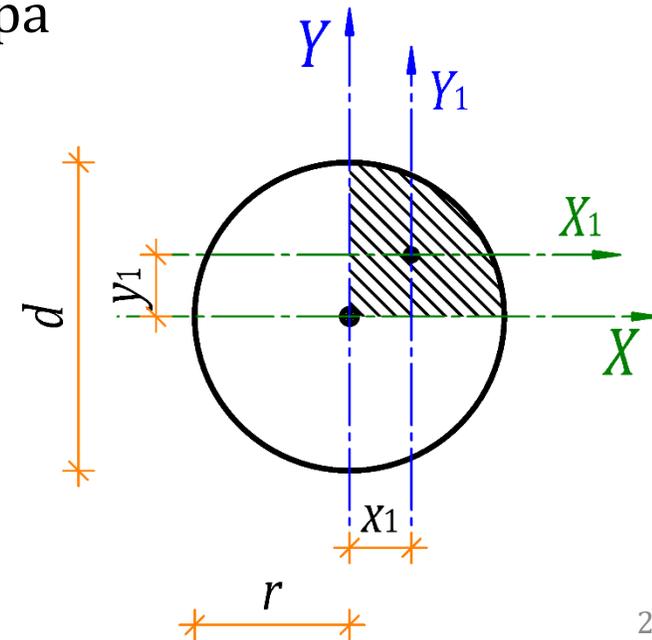
$$i_p = \sqrt{\frac{I_p}{A}},$$

где I_p – полярный момент инерции сечения относительно центра тяжести сечения;

A – площадь сечения

Пример 10. Дано: Круг радиусом $r = 5$ см, $A = 78,5$ см²

$$I_p = \frac{\pi R^4}{2} = \frac{3,14 \cdot 5^4}{2} = 990,6 \text{ см}^4 \rightarrow i_p = \sqrt{\frac{I_p}{A}} = \sqrt{\frac{990,6}{78,5}} = 3,6 \text{ см}$$



Ядровые расстояния (радиусы ядра сечения):

От центра тяжести вдоль осей X и Y равны отношению моментов сопротивления крайних волокон W_x и W_y к площади сечения A :

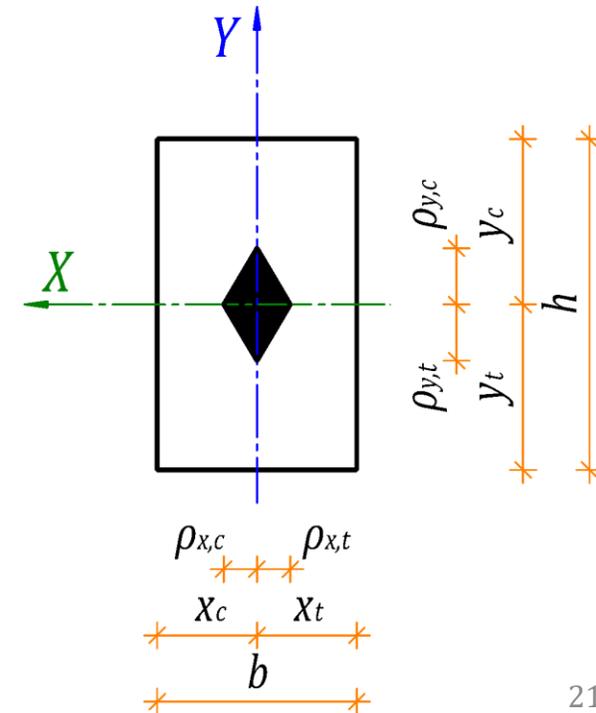
$$\rho_{y,c} = \frac{I_x}{Ay_t} = \frac{W_{x,t}}{A}, \rho_{y,t} = \frac{I_x}{Ay_c} = \frac{W_{x,c}}{A} \quad \text{и} \quad \rho_{x,c} = \frac{I_y}{Ax_t} = \frac{W_{y,t}}{A}, \rho_{x,t} = \frac{I_y}{Ax_c} = \frac{W_{y,c}}{A}$$

где $W_{x,t}$ ($W_{y,t}$) и $W_{x,c}$ ($W_{y,c}$) – моменты сопротивления крайних волокон сечения относительно оси X (Y);

y_c (x_c) и y_t (x_t) – расстояние от центра тяжести сечения до верхней и нижней грани вдоль оси Y (X) соответственно

Пример 11. Дано: $b = 30$ см; $h = 50$ см

$$\rho_y = \frac{W_x}{A} = \frac{12500}{1500} = 8,3 \text{ см} \quad \text{и} \quad \rho_x = \frac{W_y}{A} = \frac{7500}{1500} = 5 \text{ см}$$



Гибкости стержневых элементов:

В направлении главных плоскостей инерции XZ и YZ вычисляются по формулам:

$$\lambda_y = \frac{l_{0y}}{i_x} = \frac{\mu_y \cdot l_y}{i_x} \quad \text{и} \quad \lambda_x = \frac{l_{0x}}{i_y} = \frac{\mu_x \cdot l_x}{i_y},$$

где i_x и i_y – радиусы инерции сечения относительно осей X и Y ;

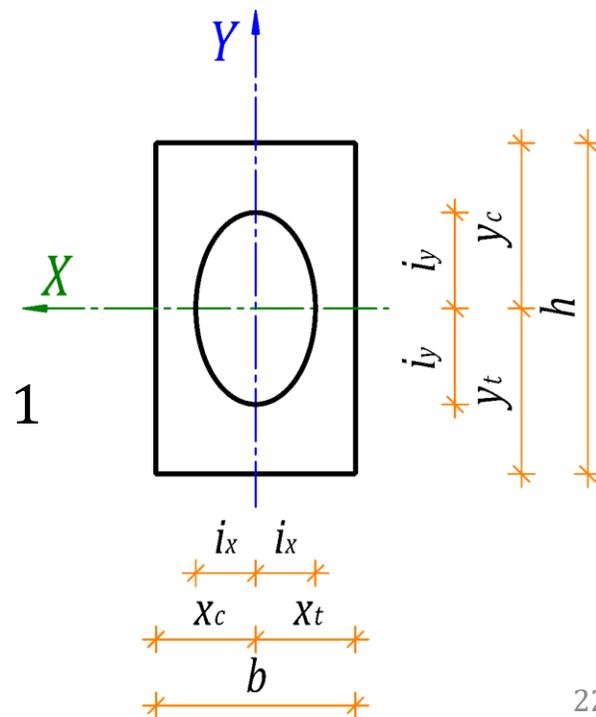
l_{0x} и l_{0y} – расчетные длины стержня в плоскостях XZ и YZ ;

μ_x и μ_y – коэффициенты расчетной длины в плоскостях XZ и YZ ;

l_x и l_y – длины пролетов (расстояния между точками закрепления) стержня в плоскостях XZ и YZ

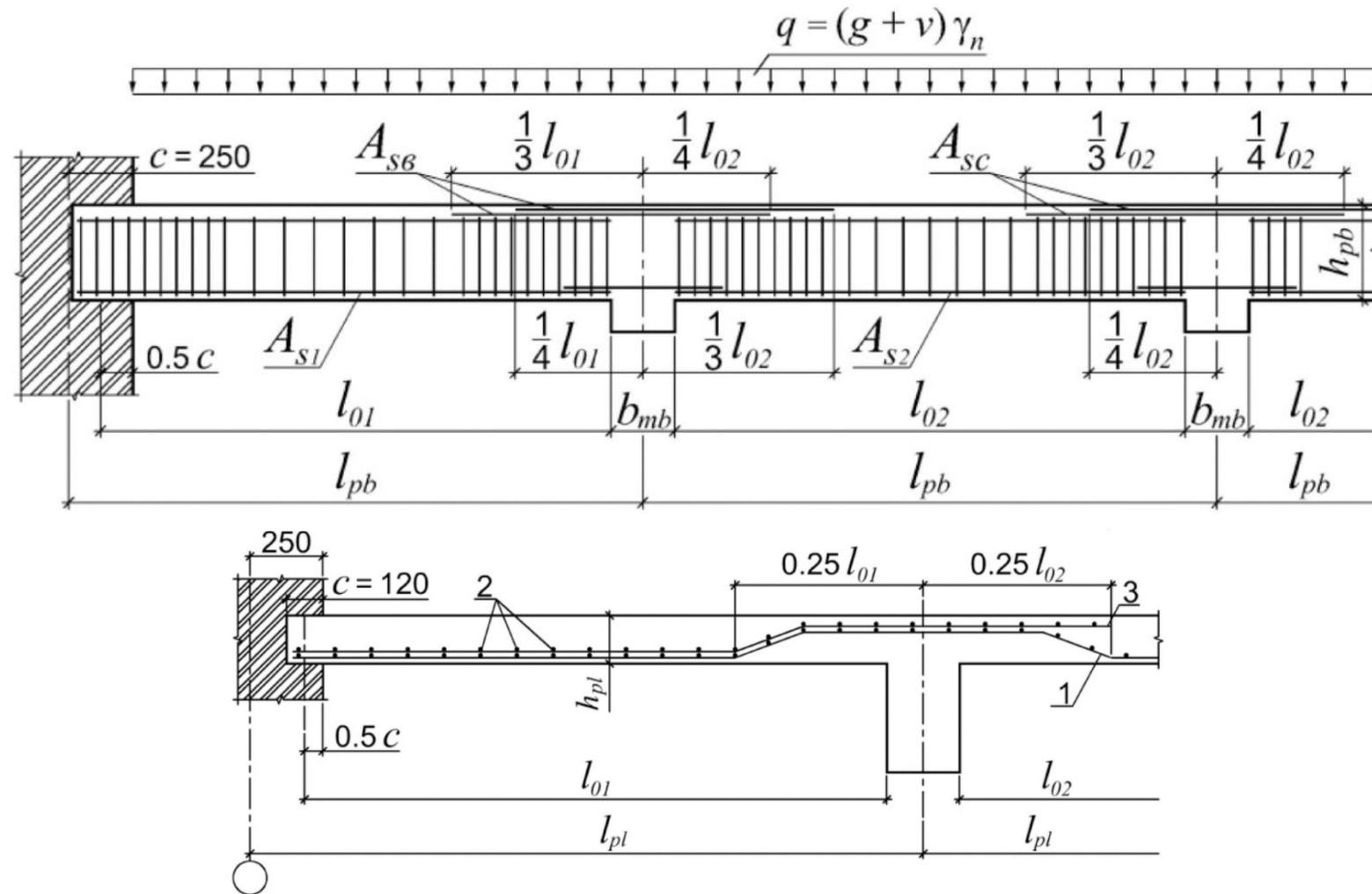
Пример 12. Дано: $b = 30$ см; $h = 50$ см; $l_x = l_y = 300$ см; $\mu_x = \mu_y = 1$

$$\lambda_y = \frac{l_{0y}}{i_x} = \frac{1 \cdot 300}{14,4} = 20,8 \quad \text{и} \quad \lambda_x = \frac{l_{0x}}{i_y} = \frac{1 \cdot 300}{8,7} = 34,5$$



Расчетные длины изгибаемых элементов

Определяются с учетом условий опирания:



Устойчивость равновесия стержня

Прямолинейной формы с шарнирным опиранием по концам, малыми прогибами (для использования дифференциального уравнения изогнутой оси балки) и при центральном сжатии впервые сформулирована Л. Эйлером:

$$K = \frac{1}{r} = \frac{v''}{\sqrt{(1 + v'^2)^3}} = \frac{M}{E \cdot I}, \text{ тогда при } v'^2 \rightarrow 0 \text{ получим: } E \cdot I \cdot v'' = M = -F \cdot v,$$

$$\text{с учетом обозначения } k^2 = \frac{F}{E \cdot I} \text{ получим: } v'' + k^2 \cdot v = 0,$$

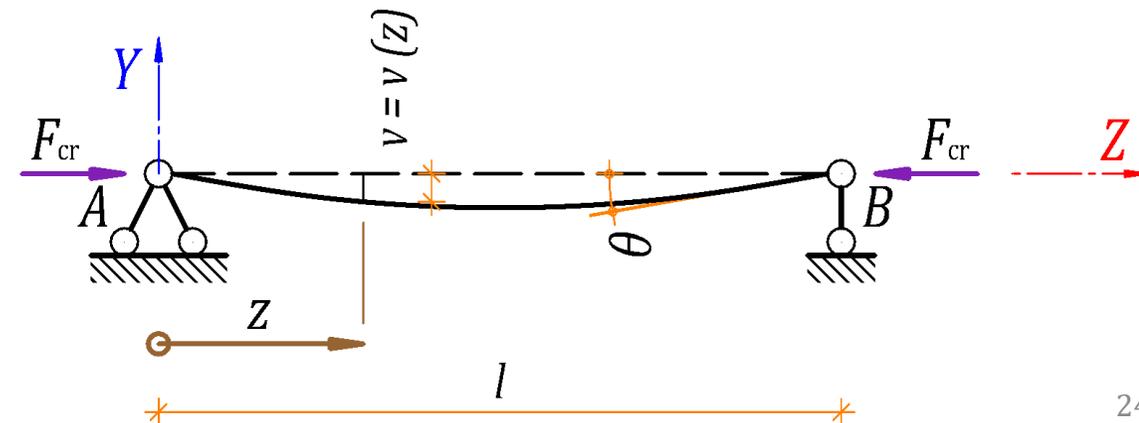
общее решение которого имеет вид: $v = C_1 \sin(k \cdot z) + C_2 \cos(k \cdot z)$

С учетом условий закрепления:

$$v|_{z=0} = 0 \text{ и } v|_{z=l} = 0,$$

определим константы:

$$C_2 = 0 \text{ и } C_1 \sin(k \cdot l) = 0 \text{ при этом } C_1 \neq 0$$



Критическая сила

Определяется решением уравнения:

$$\sin(k \cdot l) = 0 \rightarrow k \cdot l = n \cdot \pi, \quad \text{где } n = 1, 2, 3, \dots$$

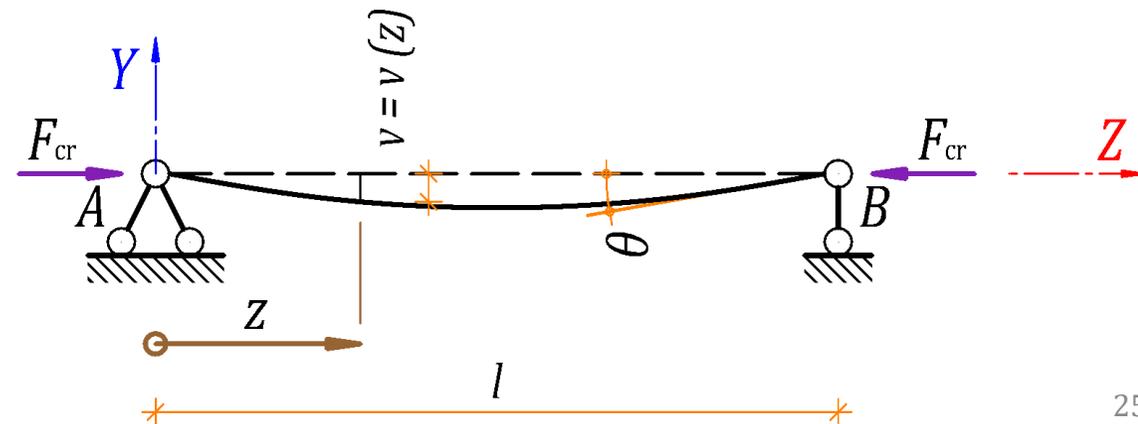
$$\text{тогда: } l \sqrt{\frac{F}{E \cdot I}} = n \cdot \pi \rightarrow F = \frac{n^2 \cdot \pi^2 \cdot E \cdot I}{l^2},$$

и минимальное значение критической силы при $n = 1$: $F_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{l^2}$

При подстановке $k = n \cdot \pi / l$ в уравнение прогибов получим:

$$v = C_1 \sin\left(\frac{n \cdot \pi \cdot z}{l}\right),$$

где n – количество опор многопролетной неразрезной балки



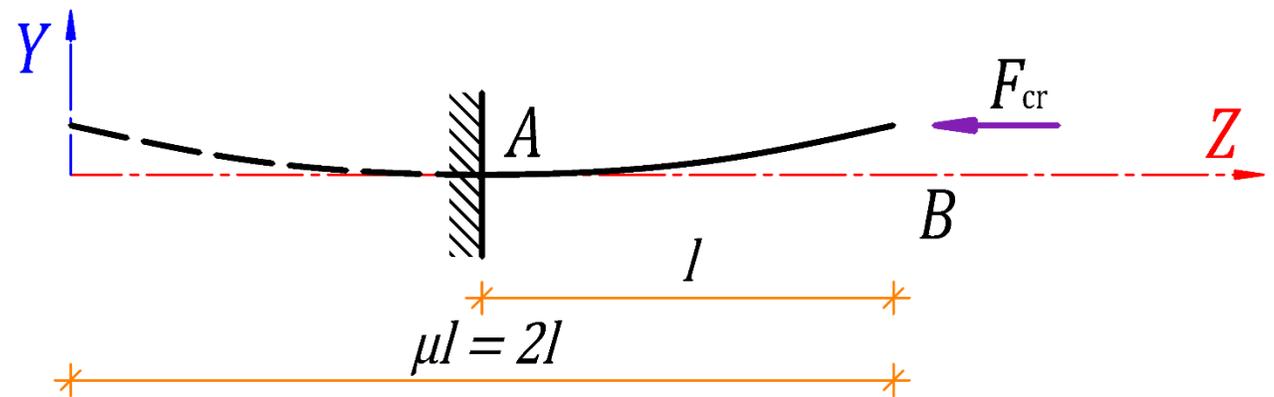
Коэффициент расчетной длины

Определяется на основе решения дифференциального уравнения с учетом соответствующих условий закрепления или путем отыскания точек перегиба на полуволне синусоиды (на рисунке пример с консольным стержнем):

$$l_{0y} = \mu_y \cdot l_y \quad \text{и} \quad l_{0x} = \mu_x \cdot l_x,$$

тогда минимальное значение критической силы: $F_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{(\mu l)^2}$

Схема закрепления элемента				
μ	1,0	0,7	0,5	2,0



Коэффициент динамичности

На примере лифта, поднимающегося с постоянным ускорением a вверх, определяется на аналогии с уравнением равновесия всех действующих сил на вертикальную ось Y :

$$\sum F_y = N - P - F_{И} = 0,$$

где N – нормальная сила в поперечном сечении каната;

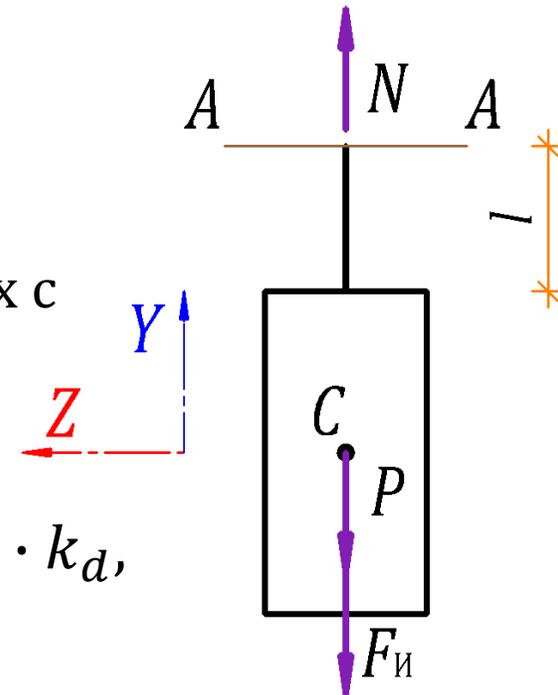
$P = m \cdot g$ – вес кабины лифта и каната длиной l ;

$F_{И} = m \cdot a$ – сила инерции, возникающая при движении лифта вверх с постоянным ускорением a ;

m – масса кабины лифта и каната длиной l , тогда:

$$N = P + F_{И} = m \cdot g + m \cdot a = m(g + a) = m \cdot g \left(1 + \frac{a}{g}\right) = m \cdot g \cdot k_d,$$

где $k_d = 1 + \frac{a}{g}$ – коэффициент динамичности



Методы определения внутренних усилий

В статических неопределимых конструктивных системах зависят от топологии элементов расчетной модели:

- Для стержневых систем могут использоваться метод перемещений (в большинстве ПК) или метод сил
- Для пластинчатых систем могут использоваться метод конечных элементов (в большинстве ПК) или метод конечных разностей
- Для массивных конструкций могут использоваться методы конечных (в большинстве ПК) или граничных элементов
- В разнородных системах используется комбинация этих методов

В статически определимых конструктивных системах внутренние усилия находятся с помощью метода сечений – на основе равновесия внешних сил и опорных реакций с одной из сторон выбранного сечения

Метод сечений

На примере шарнирно-опертой балки с двумя сосредоточенными силами P_Y на равном расстоянии от опор l_P :

Опорные реакции $R_{Y,A}$ и $R_{Y,B}$ находятся из уравнений равновесия сил на ось Y и моментов относительно точки B :

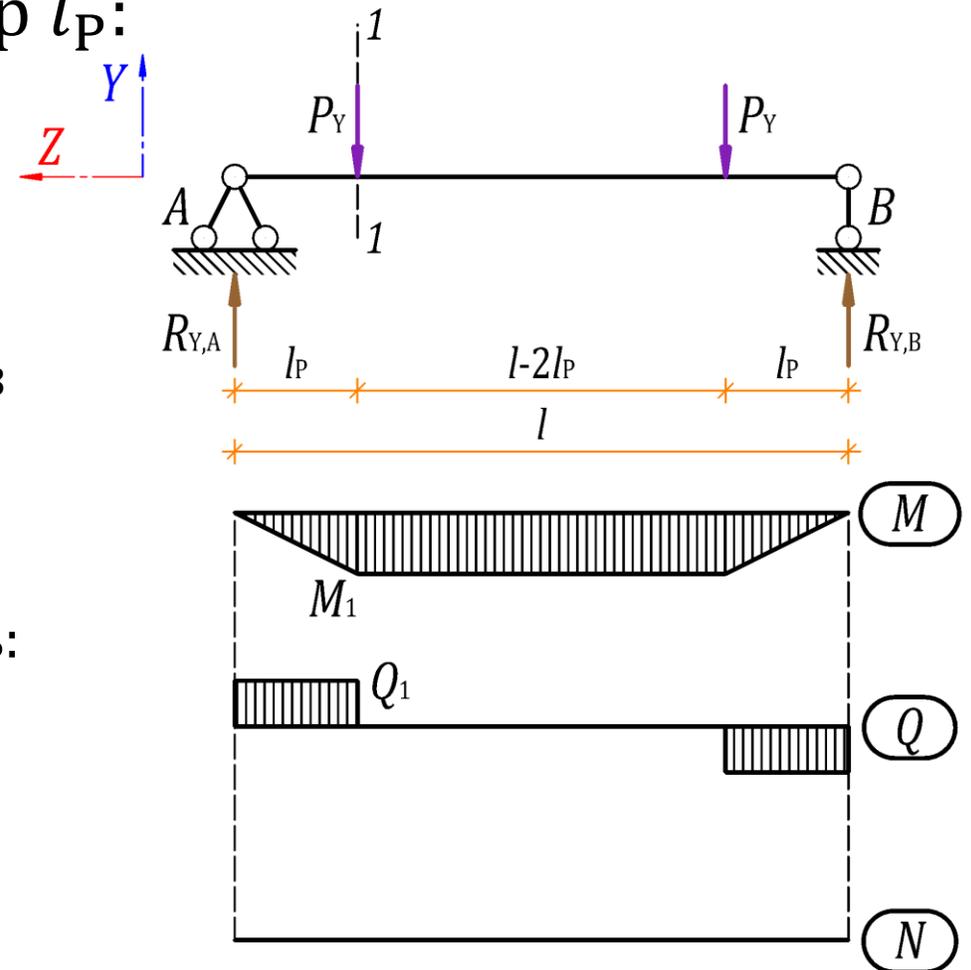
$$\Sigma Y = -2P_Y + R_{Y,A} + R_{Y,B} = 0 \rightarrow 2P_Y = R_{Y,A} + R_{Y,B}$$

$$\begin{aligned} \Sigma M_B &= R_{Y,A}l - P_Y(l - l_P) - P_Yl_P = 0 \rightarrow \\ &\rightarrow R_{Y,A}l = P_Yl \rightarrow R_{Y,A} = P_Y \rightarrow R_{Y,B} = P_Y \end{aligned}$$

Проведем сечение 1-1 и отбросим правую часть:

$$M_1 = R_{Y,A}l_P \quad \text{и} \quad Q_1 = R_{Y,A} = P_Y$$

Участок данной балки между двумя силами P_Y находится в состоянии **чистого изгиба** – $Q = 0$



Внутренние напряжения в поперечном сечении

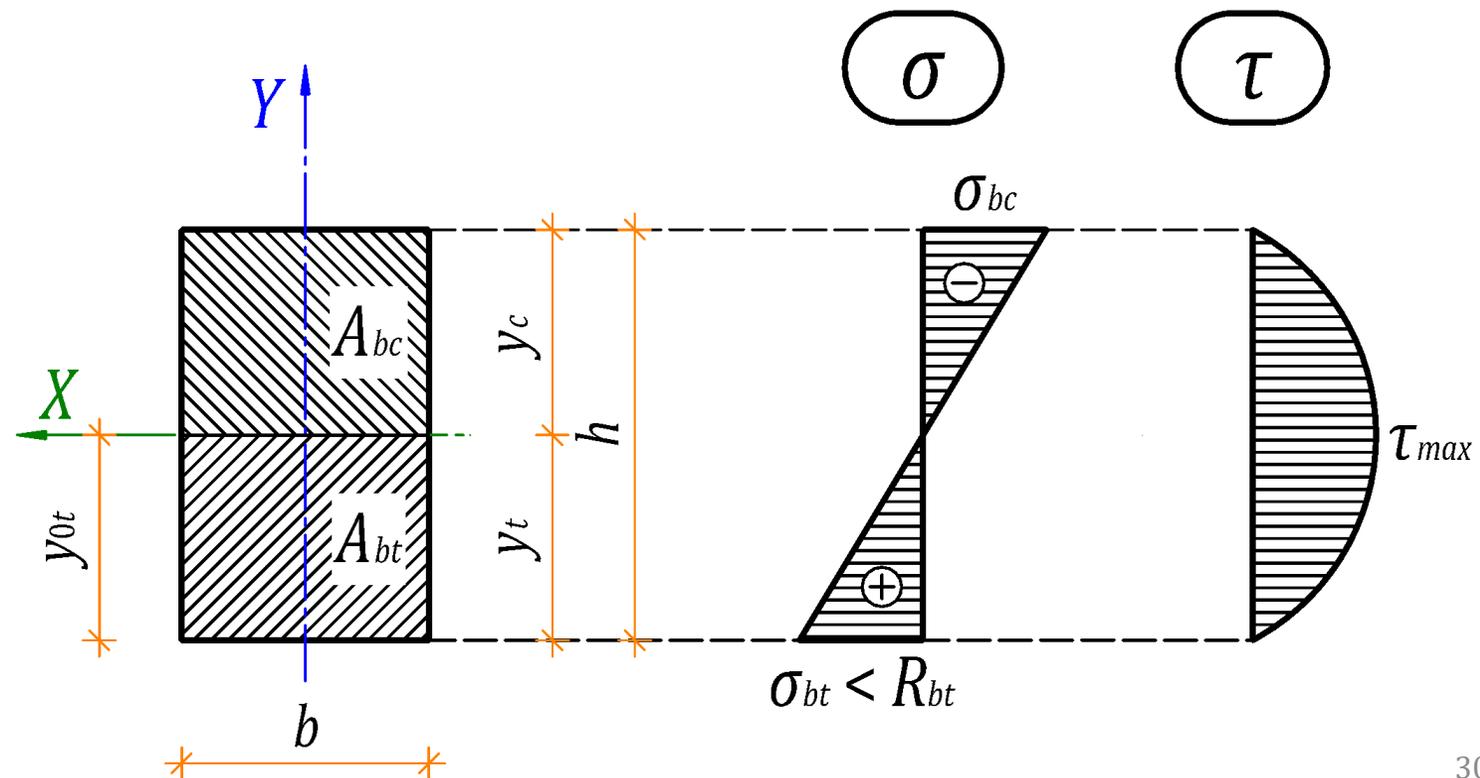
При изгибе балки в одной плоскости вычисляют по формулам:

$$\sigma = \frac{M_x y_i}{I_x} \quad \text{и} \quad \tau = \frac{Q_y S_x^{\text{отс}}}{I_x b}$$

где σ и τ – нормальные и касательные напряжения соответственно;

M_x и Q_y – изгибающий момент и поперечная сила соответственно;

I_x и $S_x^{\text{отс}}$ – момент инерции и статический момент отсекаемой части сечения относительно центральной оси X соответственно



Главные напряжения при изгибе балки

В одной плоскости действуют в нормальных сечениях в состоянии чистого изгиба ($Q = 0$) и нормально к таким наклонным площадкам, где касательные напряжения отсутствуют (равны нулю), и определяются по формуле:

$$\sigma_{mt} = \frac{\sigma}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$$

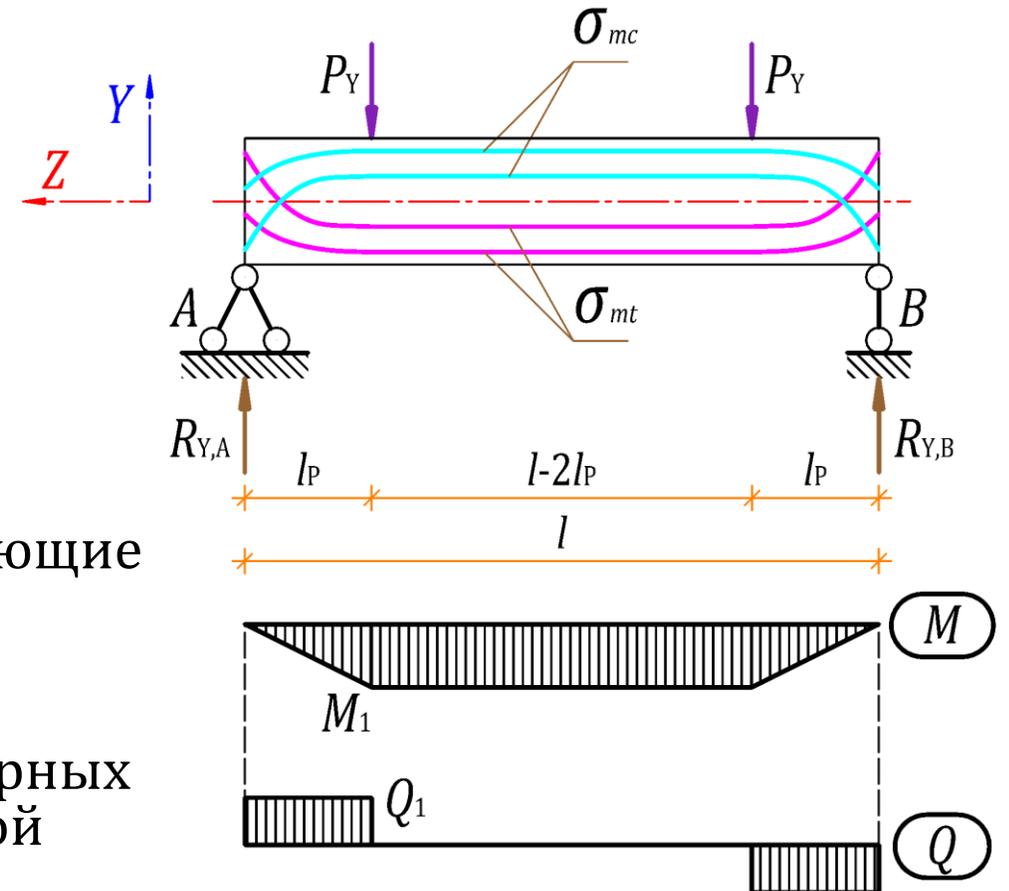
$$\sigma_{mc} = \frac{\sigma}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\tau}{\sigma}$$

где σ_{mt} и σ_{mc} – главные растягивающие и сжимающие напряжения соответственно;

σ и τ – нормальные и касательные напряжения;

α – угол наклона главных площадок к оси Y в опорных зонах на длине l_p является переменной величиной



Изгиб балки в двух плоскостях

Характеризуется следующей формулой для определения внутренних нормальных напряжений в поперечном сечении:

$$\sigma_i = \frac{P_z}{A} + \frac{M_x y_i}{I_x} + \frac{M_y x_i}{I_y}$$

где P_z, P_y, P_x – внешние нагрузки; R_z, R_y, R_x – опорные реакции;

M_x, M_y – изгибающие моменты относительно осей X и Y соответственно;

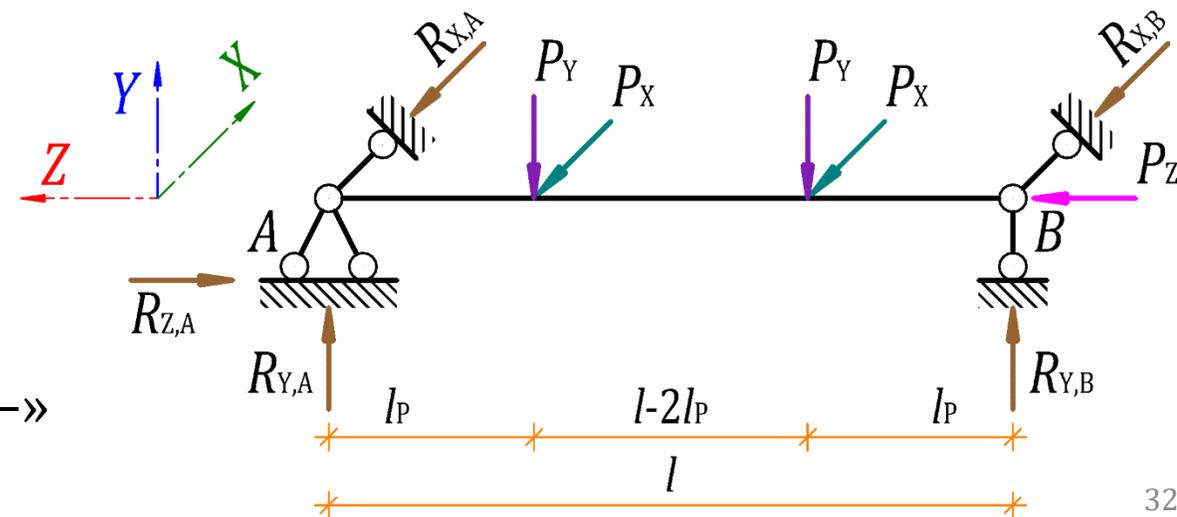
x_i, y_i – расстояния от центральных осей

X и Y до точки i соответственно;

I_x, I_y – моменты инерции относительно центральных осей X и Y соответственно;

A – площадь поперечного сечения;

P_z, M_x, M_y и x_i, y_i – с учетом знаков «+» или «-»



Виды НДС стержневых элементов

Можно условно разделить в зависимости от направления и характера действия внешних нагрузок на конструкцию:

- Поперечный изгиб – силы приложены поперек элемента в одной плоскости, совпадающей с продольной осью элемента
- Косой изгиб (изгиб в двух плоскостях) – силы приложены поперек элемента в разных плоскостях, совпадающих с продольной осью элемента
- Центральное сжатие/растяжение – силы действуют вдоль элемента и приложены в центр тяжести поперечного сечения
- Внецентренное сжатие/растяжение – силы действуют вдоль элемента на некотором расстоянии от центра тяжести поперечного сечения
- Кручение – силы приложены поперек элемента в плоскости, не совпадающей с продольной осью элемента
- Сложное НДС – другие сочетания отдельных компонентов внутренних напряжений
- Объемное НДС – наличие всех компонентов внутренних напряжений

Виды НДС пластинчатых и массивных элементов

Также можно условно разделить в зависимости от направления действия внешних нагрузок и характера деформирования конструкции:

- Плоское напряженное состояние – силы приложены в плоскости элемента, при этом поперечные деформации не равны нулю, а напряжения по толщине элемента равны нулю (характерно отдельным слоям пластин по толщине элемента)
- Плоская деформация – силы приложены в плоскости элемента, при этом поперечные деформации равны нулю, а напряжения по толщине элемента не равны нулю (характерно для балок-стенок на некотором удалении от опор)
- Поперечный изгиб совместно со сжатием или растяжением – силы приложены поперек и вдоль срединной поверхности элемента (характерно для плит)
- Сложное НДС – другие сочетания отдельных компонентов внутренних напряжений
- Объемное НДС – наличие всех компонентов внутренних напряжений, характерно опорным зонам плитных и массивных конструкций

Кривизной K плоской кривой

В ее точке C называется предел отношения острого угла $\Delta\theta$ (угол смежности) между касательными кривой в точках C и E к длине дуги кривой $\overline{CE} = \Delta s$, когда точка $E \rightarrow C$, т. е.:

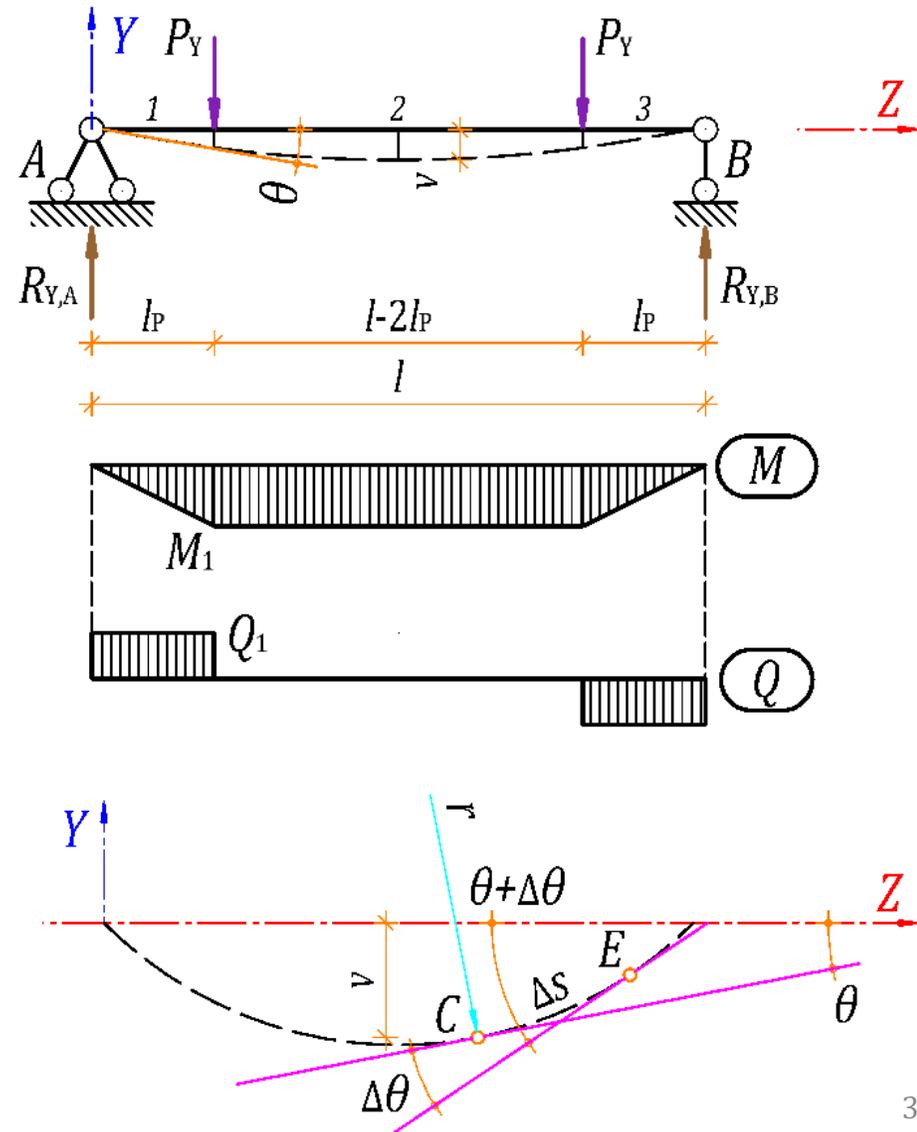
$$|K| = \frac{1}{r} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta s} = \frac{dv}{ds} = \frac{v''}{\sqrt{(1+v'^2)^3}}$$

где θ – острый угол между касательной кривой в точке C и осью Z ; r – радиус кривизны

При малых прогибах принимается, что:

$$\theta \cong \text{tg}\theta = \frac{dy}{dz} = \frac{dv}{dl} = v',$$

$$\text{тогда } v'^2 \rightarrow 0 \text{ и } K = \frac{1}{r} = v'' = \frac{M}{E \cdot I}$$



Прогиб статически определимой балки

Определяется путем интегрирования приближенного дифференциального уравнения изогнутой оси балки в данном случае с разбиением на три участка по длине и с учетом $R_Y = P_Y$, участок 1:

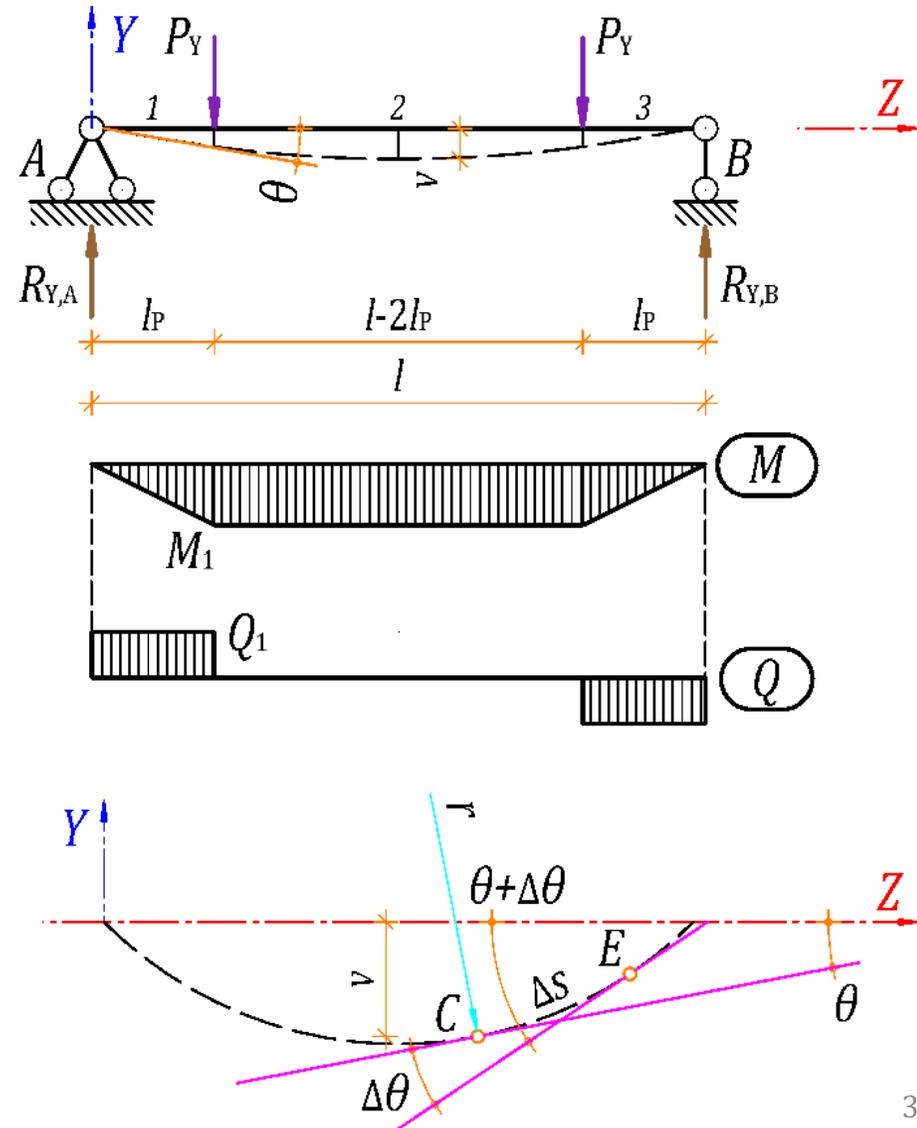
$$E \cdot I \cdot v'' = M = P_Y \cdot z$$

$$E \cdot I \cdot \frac{d(v')}{dz} = P_Y \cdot z \rightarrow E \cdot I \cdot d(v') = P_Y \cdot z \cdot dz$$

$$\int E \cdot I \cdot d(v') = \int P_Y \cdot z dz$$

$$E \cdot I \cdot v' = E \cdot I \cdot \frac{dv}{dz} = \frac{P_Y \cdot z^2}{2} + C_1$$

$$E \cdot I \cdot dv = \frac{P_Y \cdot z^2}{2} dz + C_1 dz$$



Прогиб статически определимой балки

$$\int E \cdot I dv = \int \frac{P_Y \cdot z^2}{2} dz + \int C_1 dz$$

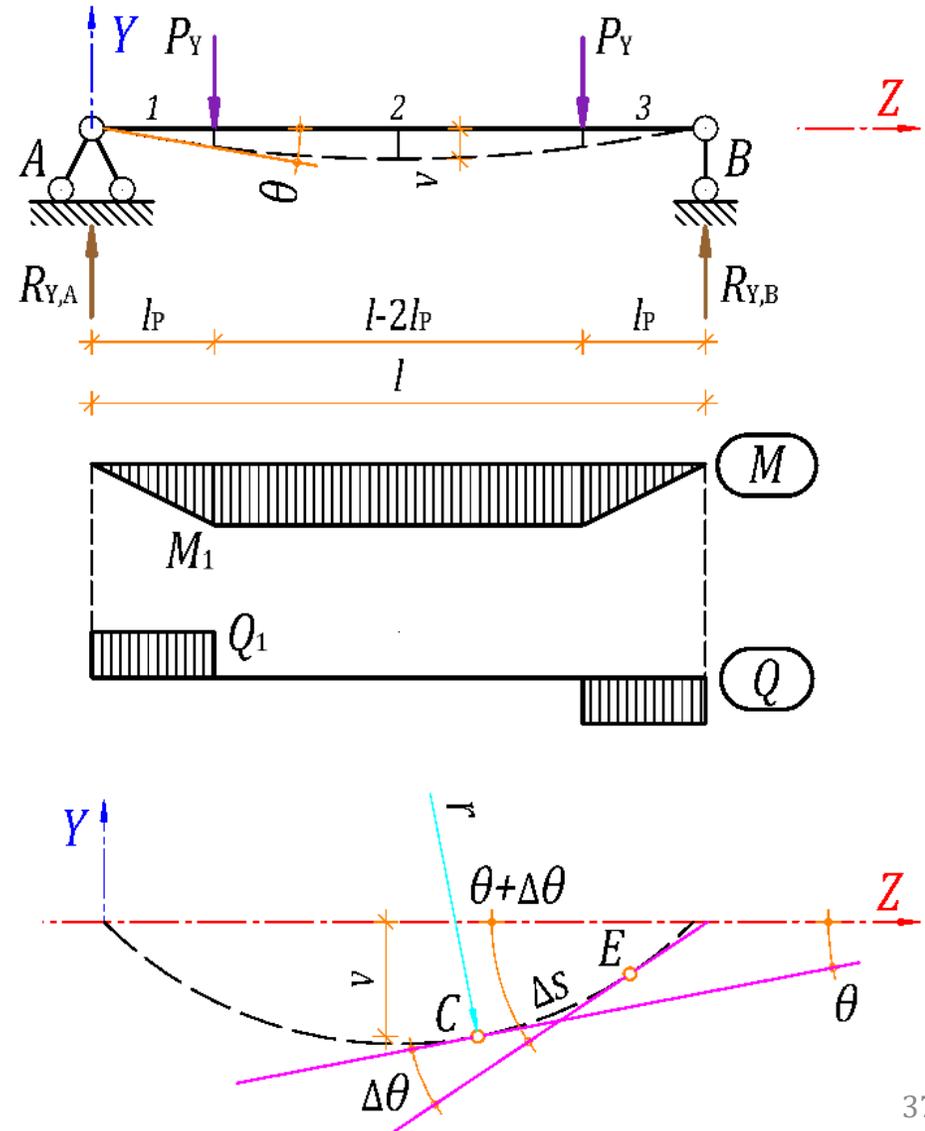
$$E \cdot I \cdot v = \frac{P_Y \cdot z^3}{6} + C_1 \cdot z + D_1$$

Повторяем процедуру для второго участка балки:

$$E \cdot I \cdot v'' = P_Y \cdot z - P_Y(z - l_P)$$

$$E \cdot I \cdot v' = \frac{P_Y \cdot z^2}{2} - \frac{P_Y(z - l_P)^2}{2} + C_2$$

$$E \cdot I \cdot v = \frac{P_Y \cdot z^3}{6} - \frac{P_Y(z - l_P)^3}{6} + C_2 \cdot z + D_2$$



Прогиб статически определимой балки

И для третьего участка балки:

$$E \cdot I \cdot v'' = P_Y \cdot z - P_Y(z - l_P) - P_Y(z - l + l_P)$$

$$E \cdot I \cdot v' = \frac{P_Y \cdot z^2}{2} - \frac{P_Y(z - l_P)^2}{2} - \frac{P_Y(z - l + l_P)^2}{2} + C_3$$

$$E \cdot I \cdot v = \frac{P_Y \cdot z^3}{6} - \frac{P_Y(z - l_P)^3}{6} - \frac{P_Y(z - l + l_P)^3}{6} + C_3 \cdot z + D_3$$

Находим постоянные интегрирования C_1 и D_1 с учетом граничных условий:

$$v_1 \Big|_{z=0} = 0,$$

$$E \cdot I \cdot v' = \frac{P_Y \cdot 0^2}{2} + C_1 = C_1 \quad \text{и} \quad E \cdot I \cdot 0 = \frac{P_Y \cdot 0^3}{6} + C_1 \cdot 0 + D_1 = D_1 \rightarrow D_1 = 0$$

Прогиб статически определимой балки

Находим постоянные интегрирования C_2 и C_3 с учетом граничных условий:

$$v'_1 \Big|_{z=l_P} = v'_2 \Big|_{z=l_P} \quad \text{и} \quad v'_2 \Big|_{z=l-l_P} = v'_3 \Big|_{z=l-l_P}$$

$$\frac{P_Y \cdot l_P^2}{2} + C_1 = \frac{P_Y \cdot l_P^2}{2} - \frac{P_Y(l_P - l_P)^2}{2} + C_2 \rightarrow C_1 = C_2$$

$$\frac{P_Y \cdot (l - l_P)^2}{2} - \frac{P_Y(l - l_P - l_P)^2}{2} + C_2 =$$

$$= \frac{P_Y \cdot (l - l_P)^2}{2} - \frac{P_Y(l - l_P - l_P)^2}{2} - \frac{P_Y(l - l_P - l + l_P)^2}{2} + C_3 \rightarrow C_2 = C_3 = C_1,$$

аналогично получаем $D_1 = D_2 = D_3 = 0$

Прогиб статически определимой балки

Находим постоянную интегрирования $C_1 = C_2 = C_3 = C$ с учетом граничных условий:

$$v_1 \Big|_{z=l} = 0,$$

$$E \cdot I \cdot 0 = \frac{P_Y \cdot l^3}{6} - \frac{P_Y(l - l_P)^3}{6} - \frac{P_Y(l - l + l_P)^3}{6} + C \cdot l + D = 0$$

$$\frac{P_Y \cdot l^3}{6} - \frac{P_Y(l - l_P)^3}{6} - \frac{P_Y l_P^3}{6} + C \cdot l = 0$$

$$\frac{P_Y(l^3 - l^3 + 3 \cdot l^2 \cdot l_P - 3 \cdot l \cdot l_P^2 + l_P^3 - l_P^3)}{6} + C \cdot l = 0$$

$$\frac{P_Y(3 \cdot l^2 \cdot l_P - 3 \cdot l \cdot l_P^2)}{6} + C \cdot l = 0 \rightarrow C = -\frac{3 \cdot P_Y \cdot l_P \cdot l(l - l_P)}{6 \cdot l} = -\frac{P_Y \cdot l_P(l - l_P)}{2}$$

Уравнение прогибов и углов поворота

Подставляя найденные постоянные интегрирования в выражения для прогибов и углов поворота на каждом участке получим, для участка 1:

$$E \cdot I \cdot v' = \frac{P_Y \cdot z^2}{2} - \frac{P_Y \cdot l_P(l - l_P)}{2} \rightarrow v' = \frac{P_Y(z^2 - l_P(l - l_P))}{2 \cdot E \cdot I}$$

$$E \cdot I \cdot v = \frac{P_Y \cdot z^3}{6} - \frac{P_Y \cdot l_P(l - l_P) \cdot z}{2} \rightarrow v = \frac{P_Y \cdot z(z^2 - 3 \cdot l_P(l - l_P))}{6 \cdot E \cdot I},$$

для участка 2:

$$E \cdot I \cdot v' = \frac{P_Y \cdot z^2}{2} - \frac{P_Y(z - l_P)^2}{2} - \frac{P_Y \cdot l_P(l - l_P)}{2} \rightarrow v' = \frac{P_Y(2 \cdot z \cdot l_P - l \cdot l_P)}{2 \cdot E \cdot I}$$

$$E \cdot I \cdot v = \frac{P_Y \cdot z^3}{6} - \frac{P_Y(z - l_P)^3}{6} - \frac{P_Y \cdot l_P(l - l_P) \cdot z}{2} \rightarrow v = \frac{P_Y \cdot l_P(l_P^2 + 3 \cdot z(z - l))}{6 \cdot E \cdot I}$$

Максимальный прогиб балки в середине пролета

Для нахождения максимального прогиба подставим $l/2$ в последнее выражение:

$$v = \frac{P_Y \cdot l_P \left(l_p^2 + 3 \cdot \frac{l}{2} \left(\frac{l}{2} - l \right) \right)}{6 \cdot E \cdot I} = \frac{P_Y \cdot l_P}{6 \cdot E \cdot I} \left(l_p^2 - \frac{3l^2}{4} \right) = -\frac{P_Y \cdot l_P}{24 \cdot E \cdot I} (3l^2 - 4l_p^2),$$

знак «минус» указывает направление изгиба балки в принятой системе координат и соответствует направлению внешних сил

Литература:

- Павлов П.А., Паршин Л.К., Мельников Б.Е., Шерстнев В.А. Сопротивление материалов : Учебное пособие. 2-е изд., испр. и доп. – СПб.: Издательство «Лань», 2007. – 560 с.
- Безухов Н.И. Основы теории упругости, пластичности и ползучести – Издание второе. – М.: Высшая школа, 1968. – 512 с.

ИФО | 01.03.04 | ПМ | 6-й семестр

Строительные конструкции

Лекция №11



НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ

**СТРОИТЕЛЬНЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ**

www: mgsu.ru/universityabout/Struktura/Kafedri/ZhBK/

e-mail: gbk@mgsu.ru; dpekin@mail.ru

тел.: +7 495 287 49 14 доб. 3036, 3084

Пекин Дмитрий Анатольевич, доцент, к.т.н.