

ИСА | 08.03.01 | ПГС | 6-й семестр

Железобетонные и каменные конструкции

Практическое занятие №8



НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ

**СТРОИТЕЛЬНЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ**

www: mgsu.ru/universityabout/Struktura/Kafedri/ZhBK/

e-mail: gbk@mgsu.ru; PekinDA@mgsu.ru

тел.: +7 495 287 49 14 доб. 3036, 3084

Пекин Дмитрий Анатольевич, доцент, к.т.н.

Практическое занятие №8 – краткий обзор:

- Расчетная модель (схема)
- Основные гипотезы и допущения при их составлении
- Идеализация конструкций и их систем, материалов, нагрузок
- Расчетные модели бетонных и железобетонных конструкций
- Узлы сопряжения железобетонных конструкций
- Расчет железобетонных элементов по I предельному состоянию на основе нелинейной деформационной модели
- Теории прочности бетона

Проектирование конструкций

Проектирование на сегодняшний день является важнейшим звеном, связывающим научные разработки с практикой строительства

В **проектах** находят непосредственное отражение результаты научных исследований, новые конструктивные решения, передовой опыт возведения зданий и сооружений

От качества **проектирования** в немалой степени зависят темпы технического прогресса в любой отрасли производственной деятельности человека, в том числе и в строительстве

Важной частью конструкторского **проектирования** является выбор адекватной **расчетной модели**, отражающей геометрические параметры, характеристики материалов и работу конструкций

Процесс создания расчетной модели

Связан с решением многих физических и математических проблем:

- Задание материала и его свойств
- Определение связи между компонентами НДС конструкции
- Моделирование формы и геометрии конструкции
- Создание связей между отдельными, часто разнородными элементами конструктивной системы
- Моделирование взаимодействия конструкции и грунтового основания
- Определение и задание внешних силовых нагрузок и воздействиях на несущие конструкции

Совокупность материальных точек (молекул)

Основоположниками теории упругости Огюстеном Луи **Коши** и Клодом Луи **Навье** предпринимались попытки рассматривать твердое тело как совокупность материальных точек (молекул), удерживаемых на определенных расстояниях друг от друга силами взаимодействия

Однако на основе представления о молекулярной структуре вещества ввиду исключительно большого числа элементарных материальных частиц и ничтожно малых расстояний между ними (по сравнению с размерами тела), проследить за перемещениями каждой конкретной частицы оказалось невозможным

В качестве единственно приемлемой была принята **гипотеза** о распределении вещества тела непрерывно по всему его объему (гипотеза о непрерывной сплошной среде)

Гипотеза о распределении вещества

И полученная **абстрактная** модель, называемая **статистической**, установили связь между **дискретной средой**, которой в реальности является **твердое тело**, и понятием непрерывного геометрического пространства, являвшегося в то время основой математического анализа

Именно такой подход позволил выразить перемещения точек твердого тела непрерывными функциями координат и ввести статистическое понятие напряжения как осредненной силы взаимодействия между частицами, расположенными по одну сторону от произвольной площадки, мысленно выделенной внутри тела, и частицами, расположенными по другую ее сторону

В итоге Коши, Навье и Симеон Дени Пуассон получили основные дифференциальные уравнения и соотношения **теории упругости**

Основные гипотезы теории упругости:

- Гипотеза о непрерывной сплошной среде
- Гипотеза о линейной зависимости между напряжениями, деформациями, перемещениями и их производными
- Гипотеза об однородности сплошной среды (упругие свойства материала одинаковы во всех его точках)
- Гипотеза об изотропности твердого тела (упругие свойства одинаковы во всех направлениях),

позволили теоретически сформулировать и практически использовать целый ряд важнейших физических и механических характеристик материала

Статические уравнения Навье:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + \rho \cdot X = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + \rho \cdot Y = 0$$

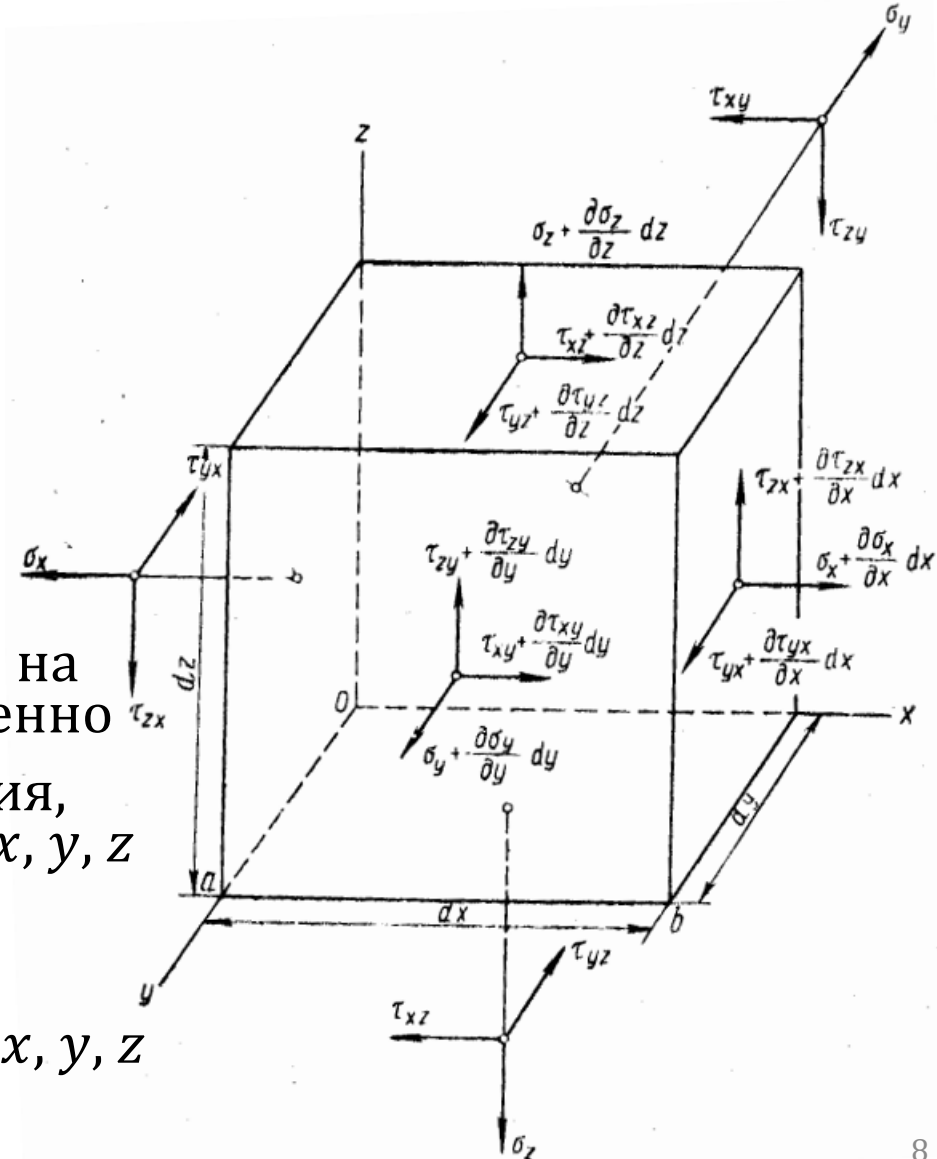
$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \rho \cdot Z = 0$$

где $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ – нормальные напряжения, действующие на площадках перпендикулярных осям x, y, z соответственно

$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \tau_{yz} = \tau_{zy}, \tau_{zx} = \tau_{xz}$ – касательные напряжения, действующие на площадках перпендикулярных осям x, y, z соответственно

ρ – плотность вещества

X, Y, Z – проекции объемных сил (сил тяжести) на оси x, y, z соответственно, отнесенные к единице массы



Геометрические уравнения Коши:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

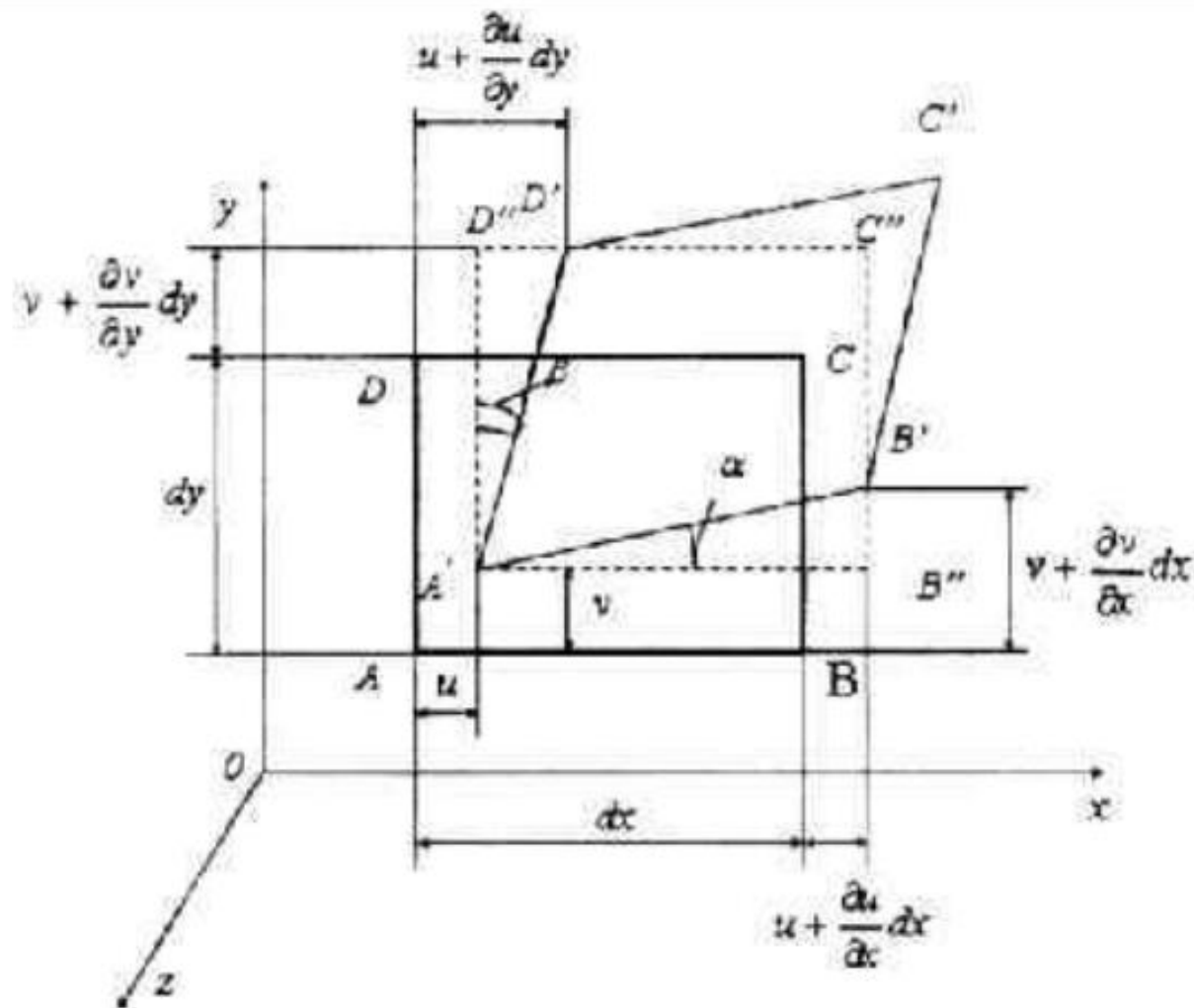
$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}; \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}$$

где $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ – относительные деформации удлинения в направлении осей x, y, z соответственно

$\gamma_{xy} = \gamma_{yx}, \gamma_{yz} = \gamma_{zy}, \gamma_{zx} = \gamma_{xz}$ – углы сдвига относительно осей x, y, z соответственно

u, v, w – перемещения в направлении осей x, y, z соответственно



Физические уравнения – закон Гука:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu}{E} (\sigma_y + \sigma_z) \text{ или } \sigma_x = 2 \cdot G \left[\varepsilon_x + \frac{3 \cdot \nu}{1 - 2 \cdot \nu} \cdot \varepsilon_{\text{ср}} \right]; \quad \tau_{xy} = G \cdot \gamma_{xy}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_z) \text{ или } \sigma_y = 2 \cdot G \left[\varepsilon_y + \frac{3 \cdot \nu}{1 - 2 \cdot \nu} \cdot \varepsilon_{\text{ср}} \right]; \quad \tau_{yz} = G \cdot \gamma_{yz}$$

$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} - \frac{\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_y) \text{ или } \sigma_z = 2 \cdot G \left[\varepsilon_z + \frac{3 \cdot \nu}{1 - 2 \cdot \nu} \cdot \varepsilon_{\text{ср}} \right]; \quad \tau_{zx} = G \cdot \gamma_{zx}$$

где $G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$ – модуль сдвига

E – модуль упругости; ν – коэффициент Пуассона

$\varepsilon_{\text{ср}} = \frac{1}{3} (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)$ – средняя деформация

Условия на контуре:

$$p_{xv} = \sigma_x \cdot \cos(xv) + \tau_{xy} \cdot \cos(yv) + \tau_{xz} \cdot \cos(zv)$$

$$p_{yv} = \tau_{yx} \cdot \cos(xv) + \sigma_y \cdot \cos(yv) + \tau_{yz} \cdot \cos(zv)$$

$$p_{zv} = \tau_{zx} \cdot \cos(xv) + \tau_{zy} \cdot \cos(yv) + \sigma_z \cdot \cos(zv)$$

где p_{xv}, p_{yv}, p_{zv} – поверхностные компоненты нагрузки

$\cos(xv), \cos(yv), \cos(zv)$ – направляющие косинусы углов xv, yv, zv

В вышеперечисленных 15 уравнениях следующие неизвестные:

- компоненты напряжений: $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$
- компоненты деформаций $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$
- компоненты перемещений $u, v, w,$

т. е. всего 15 неизвестных и 15 уравнений

Идеализация формы конструкций

Позволяет перейти от объемной задачи теории упругости к различным техническим теориям изгиба стержней и пластин:

- Теория изгиба стержней Бернулли-Эйлера
- Теория изгиба стержней Тимошенко
- Теория изгиба пластин Кирхгофа-Лява
- Теория изгиба пластин Рейсснера-Миндлина,

с учетом введения различных дополнительных гипотез или допущений, позволяющих уменьшить общее количество неизвестных и уравнений, при переходе от реальной формы к стержневой или пластинчатой аналогии

Теория изгиба пластин Кирхгофа-Лява

Построена на следующих допущениях:

- **Кинематическая** гипотеза: совокупность точек, образующих линейный элемент и лежащих до деформации пластинки на какой-либо прямой, перпендикулярной срединной плоскости, остается на прямой нормальной к упругой поверхности деформированной пластинки. Это допущение аналогично гипотезе плоских сечений в технической теории изгиба балок:

$$u = -z \cdot \frac{\partial w}{\partial x}$$

$$v = -z \cdot \frac{\partial w}{\partial y}$$

Теория изгиба пластин Кирхгофа-Лява

Построена на следующих допущениях:

- **Статическая гипотеза:** пренебрегаем нормальными напряжениями ($\sigma_z = 0$), возникающими вследствие взаимного нажатия горизонтальных слоёв пластинки друг на друга, на площадках параллельных срединной плоскости. Следовательно, каждый бесконечно тонкий слой пластинки, взятый параллельно срединной плоскости, можно рассматривать в условиях плоского напряженного состояния:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu}{E} (\sigma_y + \sigma_z) = \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \cdot \sigma_y)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_z) = \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu \cdot \sigma_x)$$

Дифференциальное уравнение Софи Жермен

Изгиба пластин при отсутствии сил в срединной плоскости получается на основе принятых допущений:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \cdot \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \cdot \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{12(1 - \nu^2)}{E \cdot h^3} \cdot p(x, y)$$

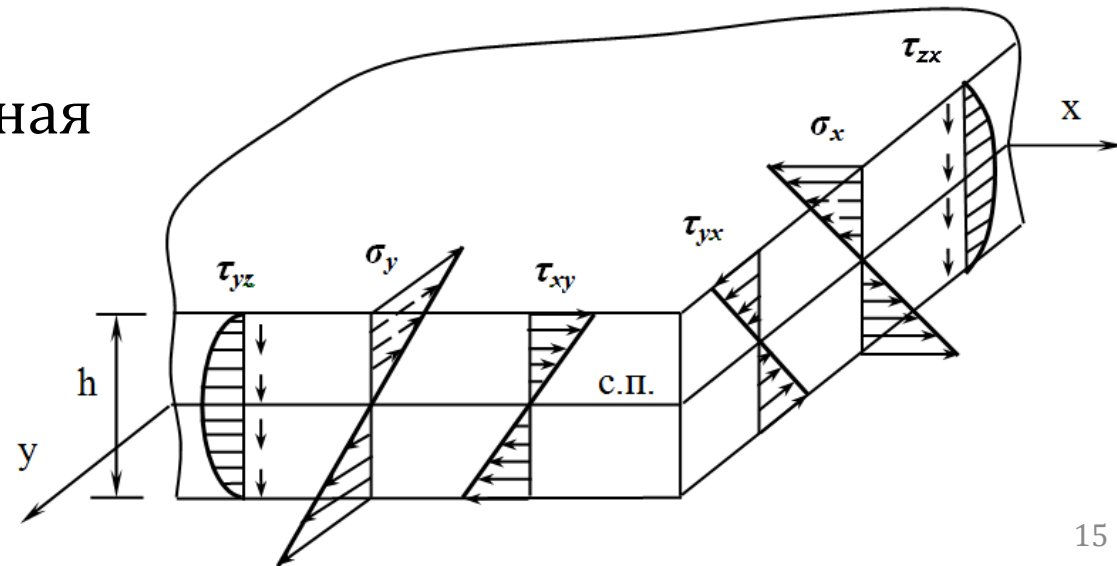
где w – прогиб срединной поверхности (вертикальное расстояние между точкой, взятой на срединной плоскости до деформации, и положением той же точки на упругой поверхности), одинаковый для всех точек линейного элемента

$p(x, y)$ – поперечная нагрузка, распределенная любым образом по поверхности пластинки

h – толщина пластинки

E – модуль упругости

ν – коэффициент Пуассона



Последствия идеализация

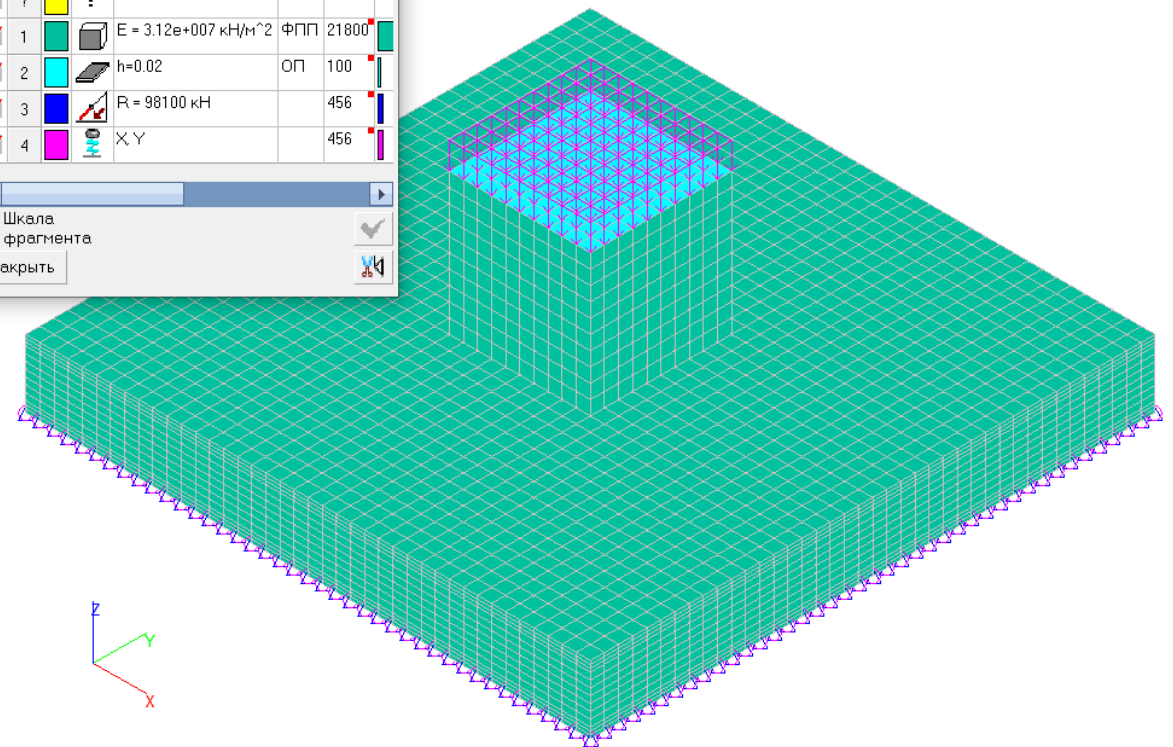
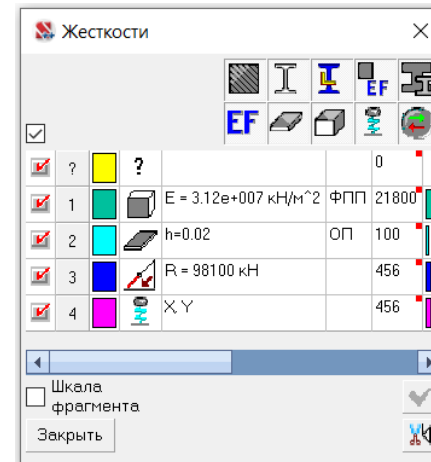
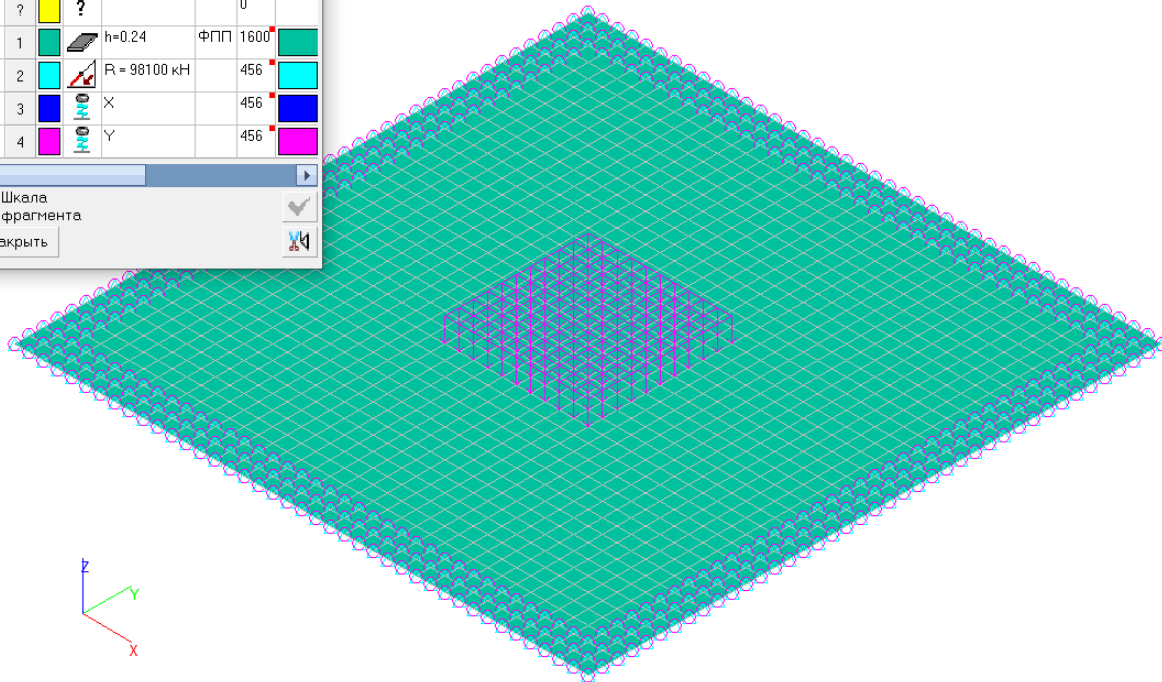
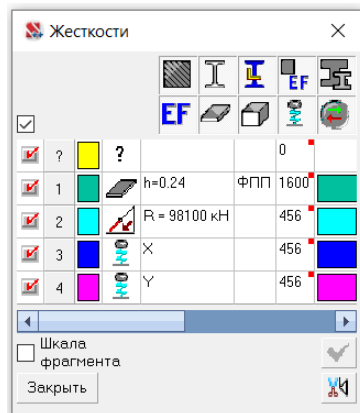
В отдельных случаях могут приводить к заметным искажениям напряженного состояния и инженеру в любом случае следует быть готовым к тому, что результаты расчета сооружения, полученные с помощью самых современных математических методов и сверхмощных компьютеров, лишь приближенно выражают его действительное НДС

Важно лишь, чтобы возникшие при этом погрешности не могли явиться одной из причин недопустимого отклонения основных характеристик готового сооружения от предъявляемых к нему эксплуатационных требований по прочности, деформативности, долговечности и пр.

Сравнение расчетных моделей. Топология

Теория Кирхгофа-Лява

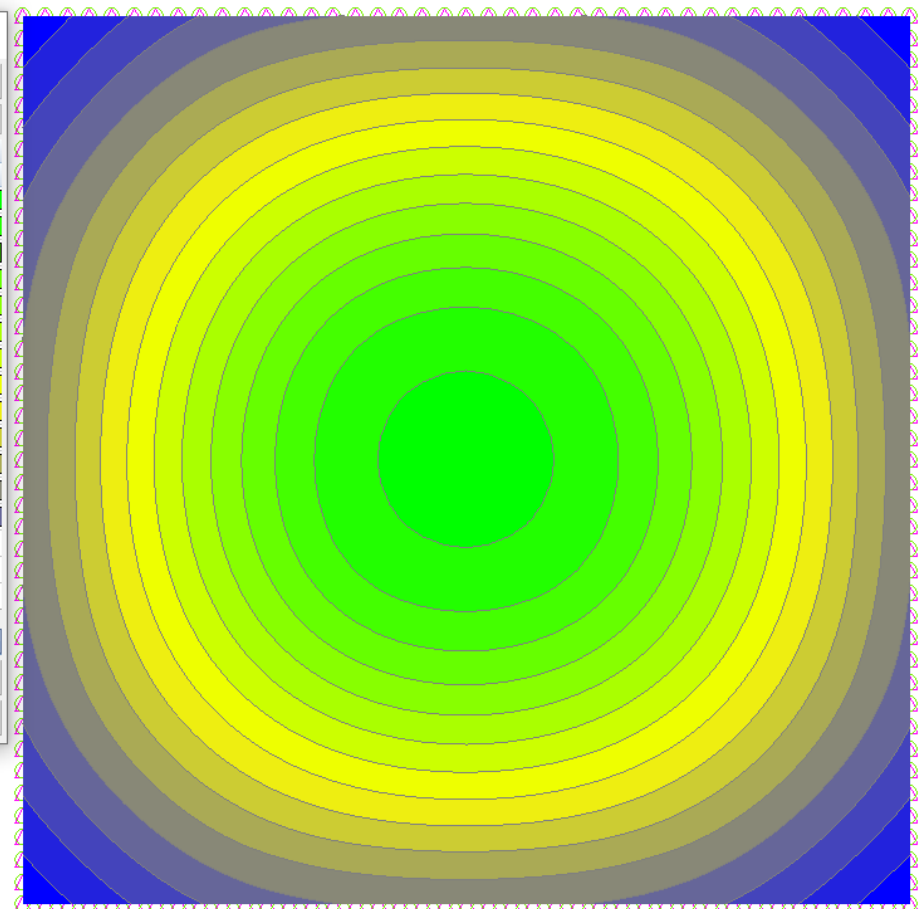
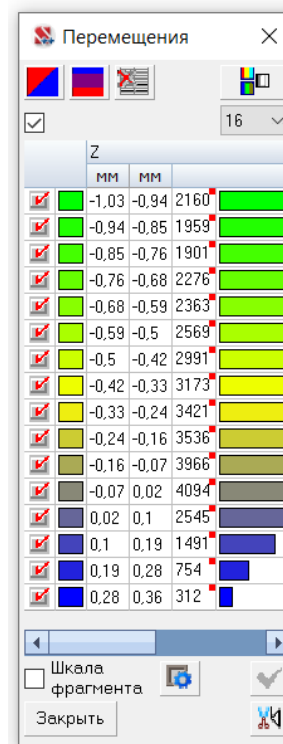
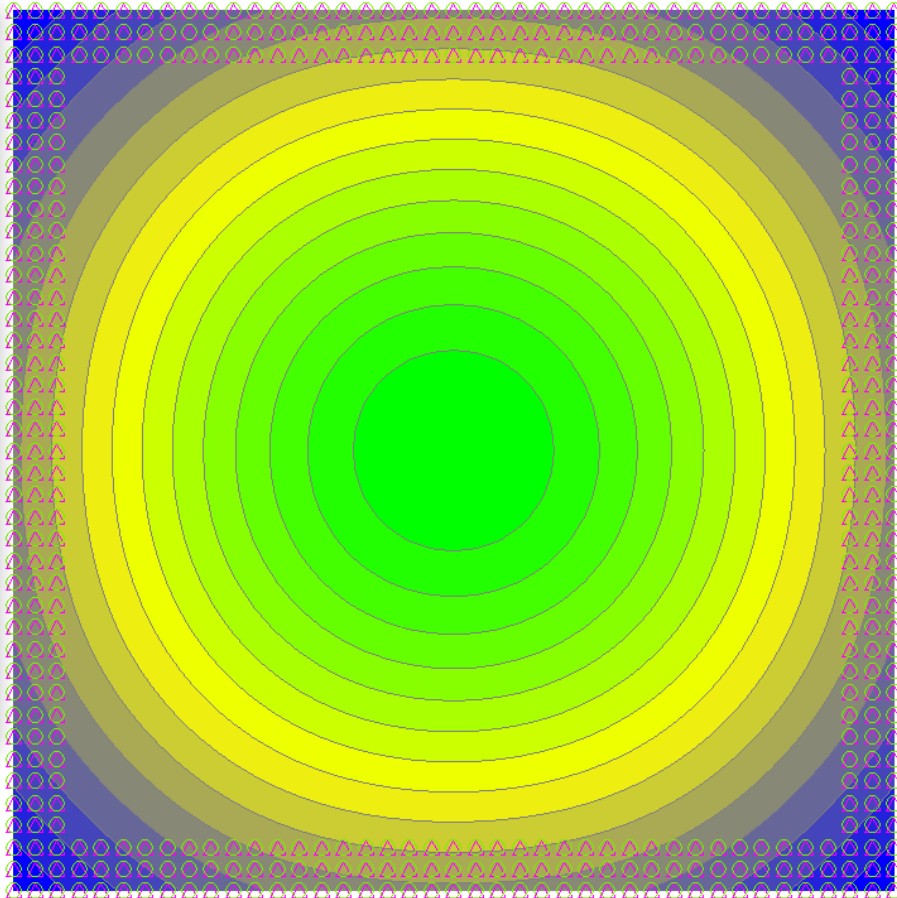
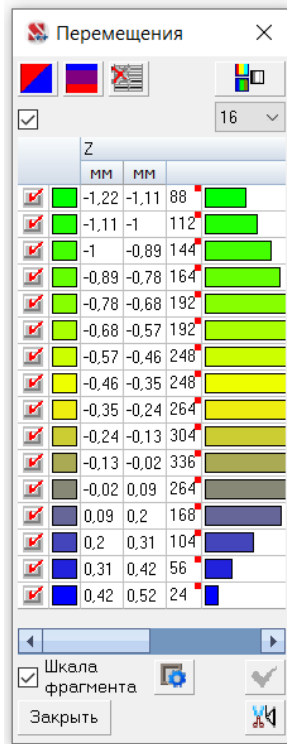
Теория упругости



Сравнение. Перемещения по Z

Теория Кирхгофа-Лява

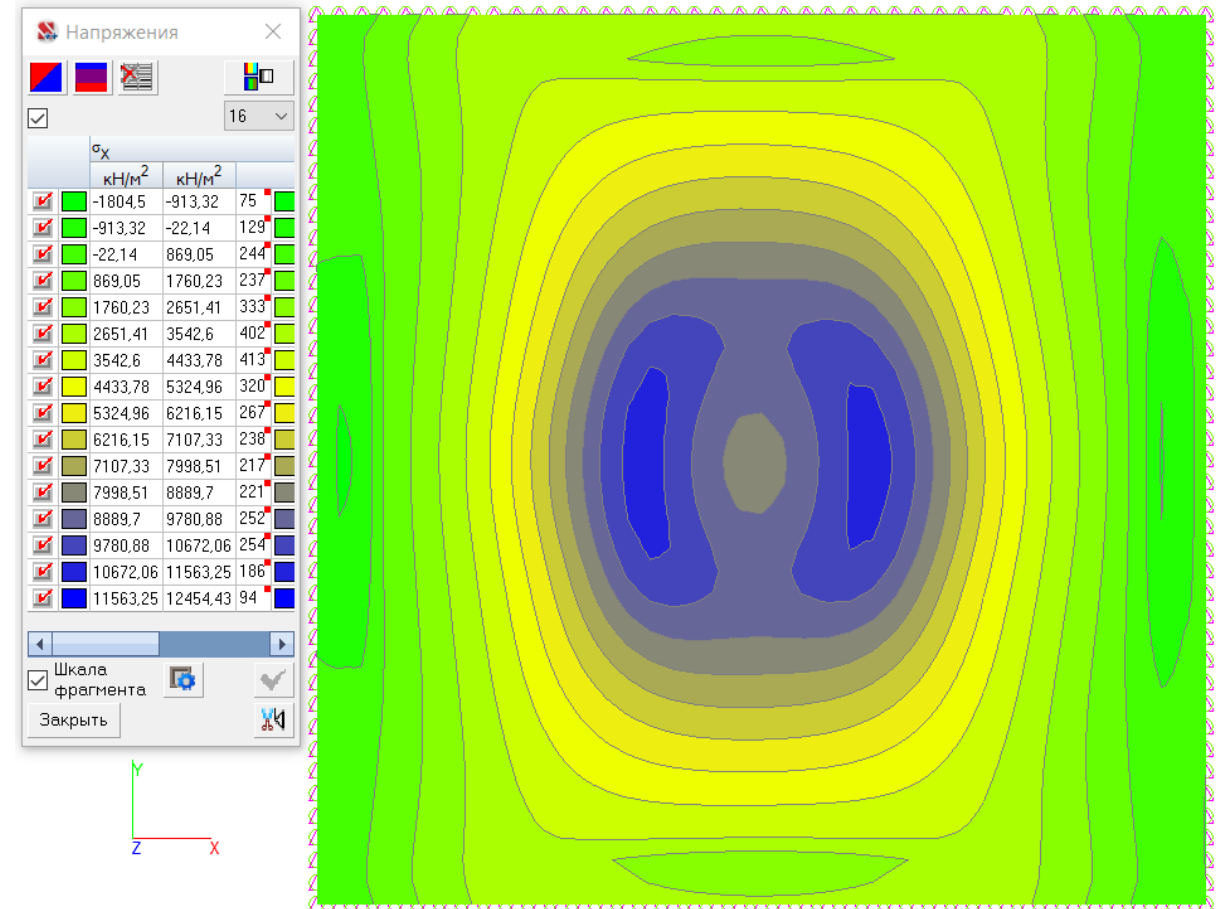
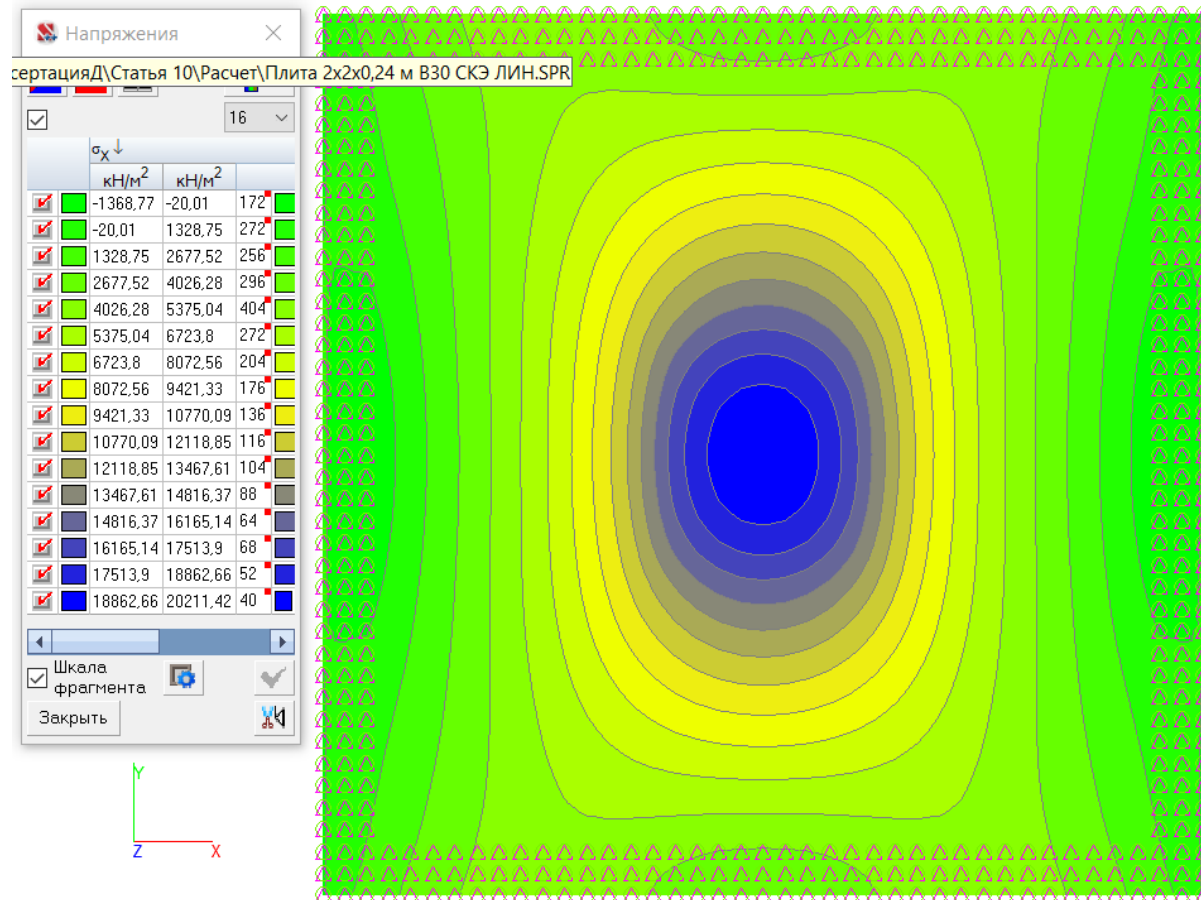
Теория упругости



Сравнение. Напряжение σ_x на нижней грани

Теория Кирхгофа-Лява

Теория упругости



Расчетные модели конструкций разделяются на:

- Стержневые: для балок, колонн и других им подобных элементов на основе теорий Эйлера-Бернулли (без учета сдвигов) и Тимошенко (с учетом сдвигов)
- Пластинчатые: для перекрытий, покрытий и других плитных конструкций на основе теорий Кирхгофа-Лява (без учета сдвигов) и Рейсснера-Миндлина (с учетом сдвигов)
Под сдвигом понимается возможность поворота нормального элемента (сечения) относительно изогнутой продольной оси стержня или срединной поверхности пластины – без учета сдвига угол между ними 90°
- Объемные: для массивных бетонных и железобетонных конструкций, в которых применение указанных выше теорий приводит к существенному искажению картины НДС
Согласно п. 3.13 СП 63. 13330 к массивным конструкциям относятся элементы, у которых отношение поверхности, открытой для их высыхания (м^2) к их объему (м^3) меньше либо равно 2, например, фундаментные плиты толщиной более 0,5 м

Сложности расчетов, свойственные ЖБК:

- Прочность бетона на сжатие и растяжение отличается
- Образование и раскрытие нормальных и наклонных трещин в растянутых зонах и уменьшение геометрических характеристик поперечных сечений
- Снижение модуля упругости сжатого бетона при росте напряжений
- Изменение высоты сжатой зоны бетона по мере нагружения
- Ползучесть в сжатом бетоне
- Заметное влияние характера армирования на разрушение
- Завышение значений нормальных напряжений по результатам расчетов с использованием теорий изгиба стержней и пластин в опорных зонах конструкций

Узлы сопряжения железобетонных конструкций

Между собой можно разделить на следующие группы:

- Шарнирные узлы, характеризуются передачей поперечных и/или продольных усилий между конструктивными элементами. Например, сборная ж/б плита или балка при соединении только по нижней грани с опорной конструкцией при помощи анкерных болтов или сварки закладных деталей
- Жесткие узлы, характеризуются передачей поперечных, продольных и изгибающих усилий между конструктивными элементами. Например, большинство узлов сопряжений различного вида монолитных железобетонных конструкций
- Податливые узлы, включают в себя как шарнирные, так и жесткие с ограничением возможности передачи тех или иных усилий и наиболее близко к действительности характеризуют сопряжение конструкций и НДС конструктивной системы в целом

Характеристики узлов сопряжения ЖБК

Играют важную роль в определении НДС и в различного вида расчетах:

- Любые типы узлов в расчетных моделях должны учитывать возможные эксцентриситеты при передаче опорных реакций на нижележащие конструкции, например, посредством добавления на концах стержней «жестких вставок» длиной равной половине габаритного размера сечения опорной конструкции или его суммы с длиной консоли при ее наличии
- В монолитных зданиях и сооружениях при создании расчетных моделей обязательно должен учитываться принятый характер армирования, например, при отсутствии надпорной арматуры или ее требуемой анкеровки узел сопряжения должен быть шарнирным
- Особая роль характеристик узлов сопряжения при определении расчетных длин сжатых элементов и их расчетов на устойчивость

Расчет ЖБК по НДМ (п. 5.2.8, 5.2.9 СП 63)

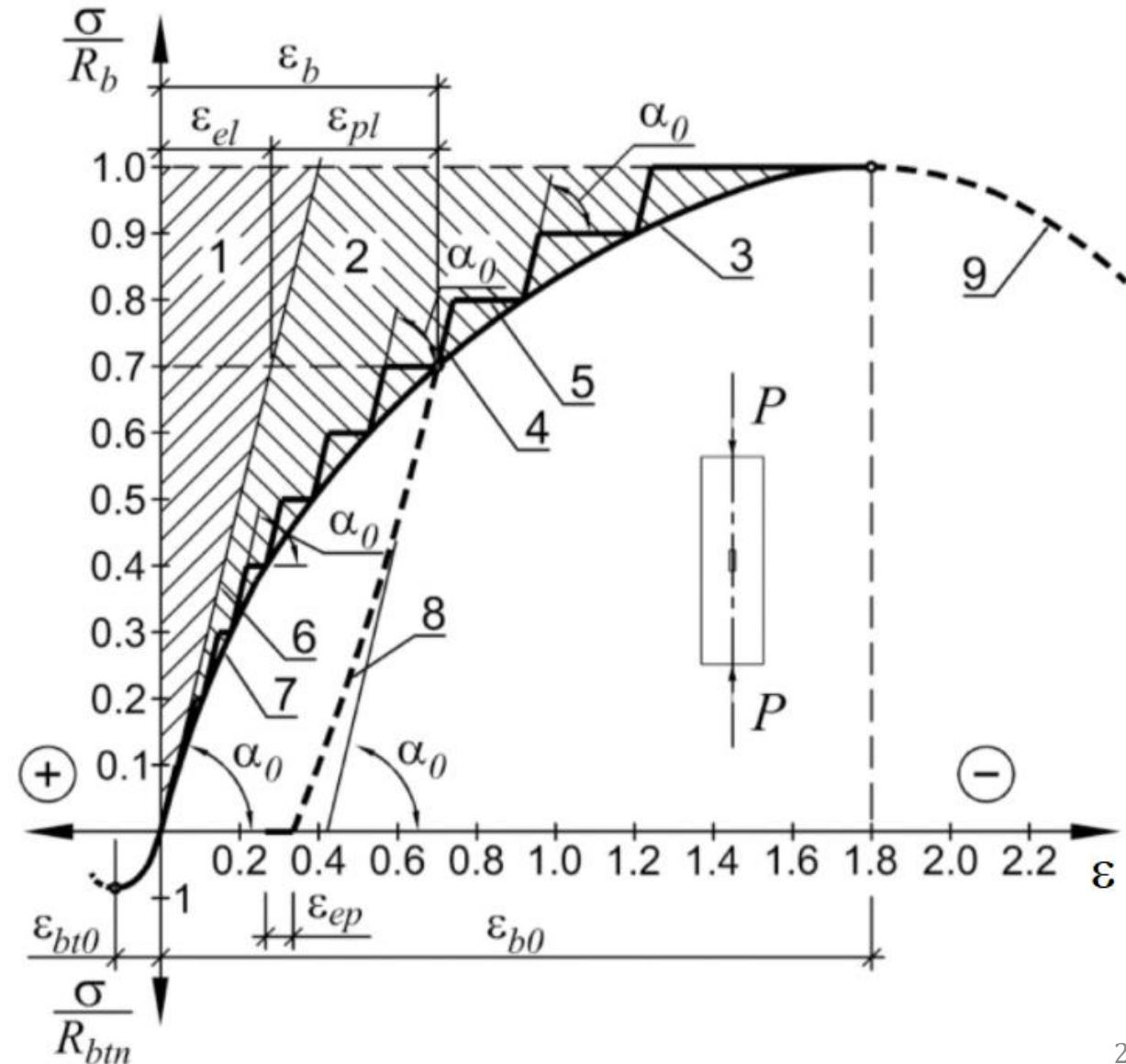
Расчет железобетонных элементов по **нелинейной** деформационной модели производят на основе **диаграмм** состояния бетона и арматуры, исходя из **гипотезы** плоских сечений

При расчете **внецентренно** сжатых железобетонных элементов по **недеформированной** схеме следует учитывать случайный эксцентриситет и влияние продольного изгиба

Критерием прочности нормальных сечений является достижение **предельных** относительных деформаций в **бетоне** или **арматуре**

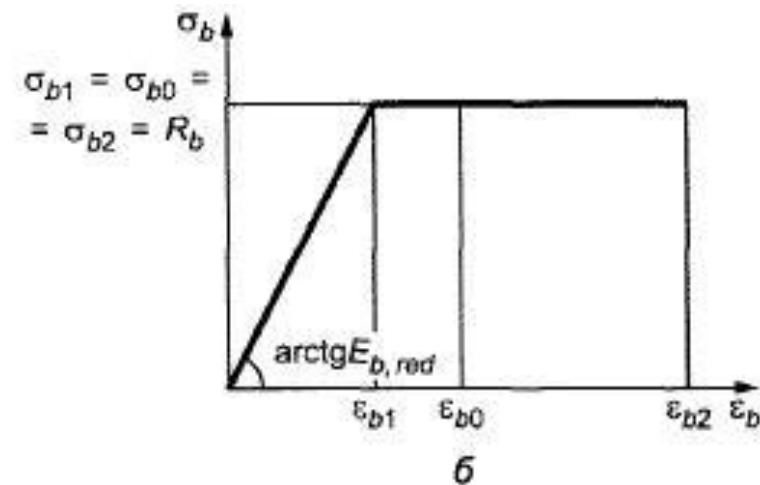
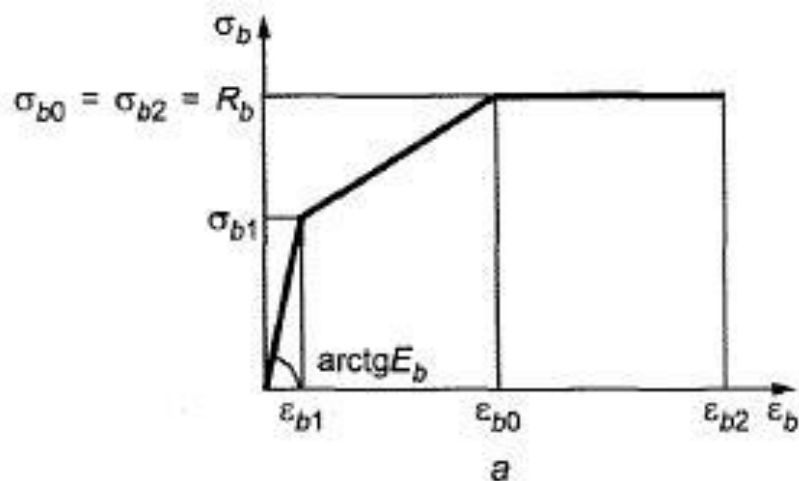
Зависимость σ - ε для бетона

- 1 – область упругих деформаций
- 2 – область неупругих деформаций
- 3, 7 – кривая полных деформаций
- 4, 6 – прямые упругих деформаций
- 5 – пластические деформации
- 8 – кривая разгрузки
- 9 – нисходящая ветвь

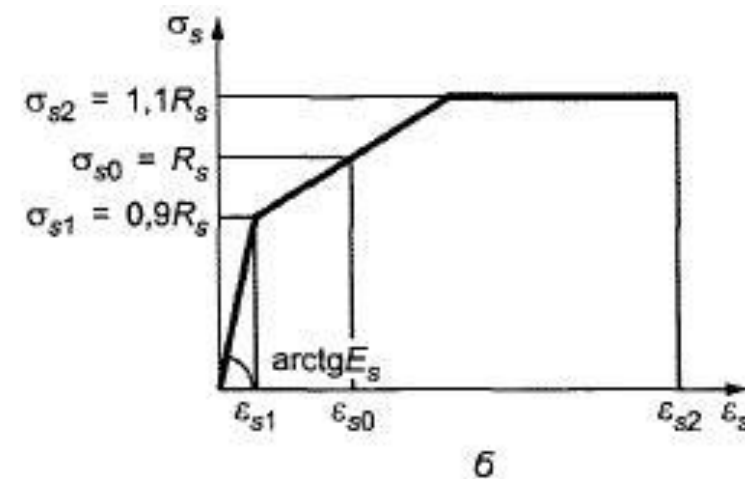
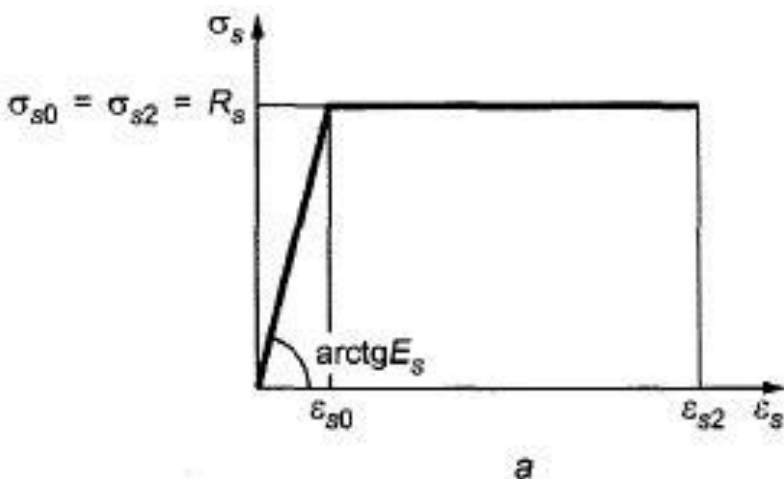


Диаграммы состояния: напряжения-деформации

- а) и б) – трехлинейная и двухлинейная диаграммы состояния сжатого бетона, соответственно



- а) и б) – двухлинейная и трехлинейная диаграммы состояния растянутой арматуры, соответственно



Расчет ЖБК по НДМ (п. 8.1.20 СП 63)

Производят на основе **диаграмм** состояния (σ - ε) бетона и арматуры с учетом следующих положений:

- Распределение относительных деформаций бетона и арматуры по высоте сечения принимают по **линейному** закону (**гипотеза плоских сечений**)
- Связь между осевыми **напряжениями** и относительными **деформациями** бетона и арматуры принимают в виде **диаграмм** состояния бетона и арматуры
- Сопротивление бетона растянутой зоны допускается **не учитывать** за исключением отдельных случаев (например, для ЖБК, в которых не допускается образование трещин)

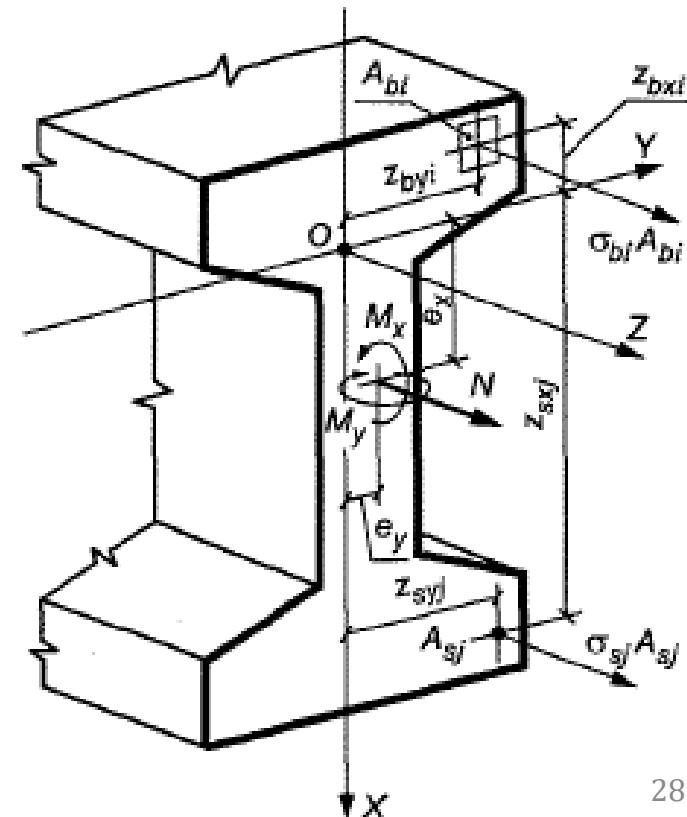
Нормальное сечение при расчете по НДМ

Переход от эпюры **напряжений** в бетоне к обобщенным внутренним **усилиям** определяют с помощью процедуры численного интегрирования напряжений по нормальному сечению

Для этого нормальное сечение условно разделяют на малые участки:

- При косом внецентренном сжатии (растяжении) и косом изгибе – по высоте и ширине сечения
- При внецентренном сжатии (растяжении) и изгибе в плоскости оси симметрии поперечного сечения элемента – только по высоте сечения

Напряжения в пределах малых участков принимают **равномерно распределенными** (усредненными)



Уравнения равновесия

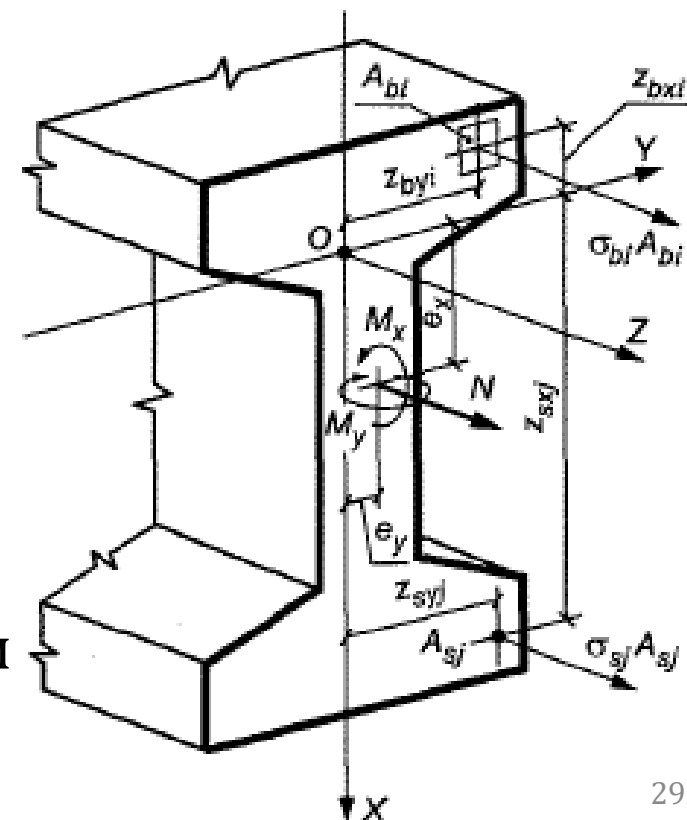
Внешних сил и внутренних усилий при расчете нормальных сечений по прочности в общем случае:

$$M_x = \sum_i \sigma_{bi} \cdot A_{bi} \cdot z_{bxi} + \sum_j \sigma_{sj} \cdot A_{sj} \cdot z_{sxj}$$

$$M_y = \sum_i \sigma_{bi} \cdot A_{bi} \cdot z_{byi} + \sum_j \sigma_{sj} \cdot A_{sj} \cdot z_{syj}$$

$$N = \sum_i \sigma_{bi} \cdot A_{bi} + \sum_j \sigma_{sj} \cdot A_{sj}$$

где M_x, M_y – изгибающие моменты от внешней нагрузки относительно выбранных и располагаемых в пределах поперечного сечения элемента координатных осей (соответственно действующих в плоскостях XOZ и YOZ или параллельно им)



Уравнения деформаций

Определяющие их распределение по сечению элемента:

$$\varepsilon_{bi} = \varepsilon_0 + \frac{1}{r_x} z_{bxi} + \frac{1}{r_y} z_{byi} \quad \text{И} \quad \varepsilon_{sj} = \varepsilon_0 + \frac{1}{r_x} z_{sxj} + \frac{1}{r_y} z_{syj}$$

Зависимости, связывающие **напряжения** и относительные **деформации** бетона и арматуры:

$$\sigma_{bi} = E_b \cdot \nu_{bi} \cdot \varepsilon_{bi}$$

$$\sigma_{sj} = E_{sj} \cdot \nu_{sj} \cdot \varepsilon_{sj}$$

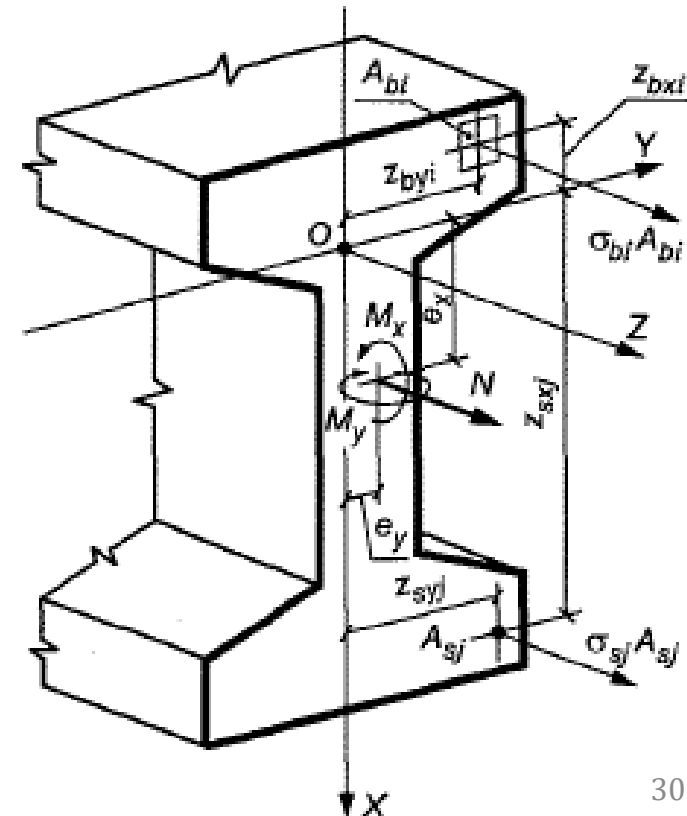
Изгибающие моменты от внешней нагрузки:

$$M_x = M_{xd} + N \cdot e_x$$

$$M_y = M_{yd} + N \cdot e_y$$

где M_{xd} , M_{yd} – изгибающие моменты, определяемые из статического расчета конструкции

N – продольная сила от внешней нагрузки



Параметры уравнений:

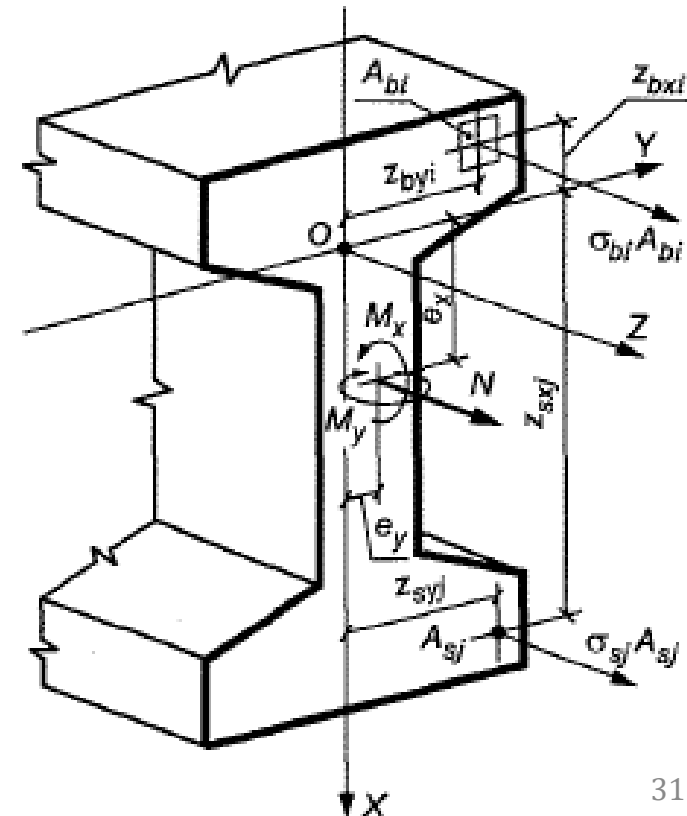
e_x, e_y – расстояния от точки приложения продольной силы N до соответствующих выбранных осей

$A_{bi}, z_{bxi}, z_{byi}, \sigma_{bi}$ – площадь, координаты центра тяжести i -го участка бетона и напряжение на уровне его центра тяжести

$A_{sj}, z_{sxj}, z_{syj}, \sigma_{sj}$ – площадь, координаты центра тяжести j -го стержня арматуры и напряжение в нем

ε_0 – относительная деформация волокна на пересечении выбранных осей (в точке 0)

$1/r_x, 1/r_y$ – кривизна продольной оси в рассматриваемом поперечном сечении элемента в плоскостях действия изгибающих моментов M_x и M_y



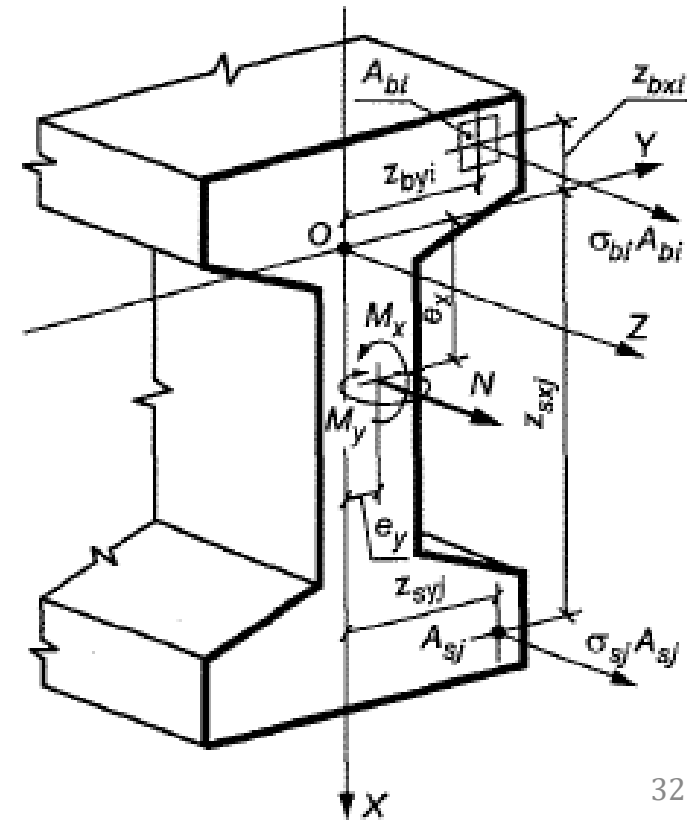
Параметры уравнений:

E_b – начальный модуль упругости бетона

E_{sj} – модуль упругости j -го стержня арматуры

ν_{bi} и ν_{sj} – коэффициенты упругости i -го участка бетона и j -го стержня арматуры, которые принимают по соответствующим диаграммам состояния бетона и арматуры

$1/r_x, 1/r_y$ – кривизна продольной оси в рассматриваемом поперечном сечении элемента в плоскостях действия изгибающих моментов M_x и M_y



Расчет нормальных сечений ЖБЭ (п. 8.1.24 СП 63)

По прочности на основе НДМ производят из условий:

$$|\varepsilon_{b,max}| \leq \varepsilon_{b,ult} \quad \text{и} \quad |\varepsilon_{s,max}| \leq \varepsilon_{s,ult}$$

где $\varepsilon_{b,max}$ – относительная деформация наиболее сжатого волокна бетона в нормальном сечении элемента от действия внешней нагрузки

$\varepsilon_{s,max}$ – относительная деформация наиболее растянутого стержня арматуры в нормальном сечении элемента от действия внешней нагрузки

$\varepsilon_{b,ult}$ – предельное значение относительной деформации бетона при сжатии, принимаемое согласно п. 8.1.30 СП 63.13330

$\varepsilon_{s,ult}$ – предельное значение относительной деформации удлинения арматуры, принимаемое согласно п. 8.1.30 СП 63.13330

Теории прочности бетона

Предполагается, что **прочность** бетона в каждой точке его объема определяется исключительно **характером** и **величиной** ее **напряженного** состояния, т. е. существует определенная **поверхность** в системе координат **главных** напряжений $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, которая является **геометрической** интерпретацией условия **прочности** бетона

Напряженные **состояния**, характеризующиеся точками **внутри** этой поверхности, не вызывают **разрушения** бетона. Очевидно, что начало координат этой системы в точке $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 0$ соответствует **ненапряженному** состоянию бетона

Теория прочности бетона Гениева-Киссюка

Является **обобщением** теории прочности **Мора** применительно к бетону:
$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1) - (R_b - R_{bt})(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) - R_bR_{bt} = 0$$

где $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ – главные напряжения

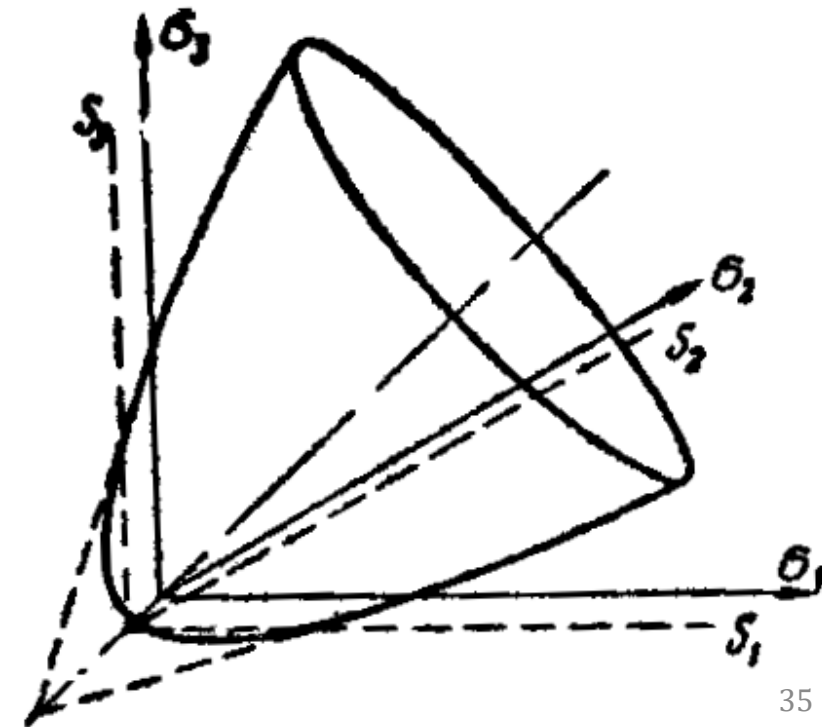
R_b, R_{bt} – сопротивления бетона осевому сжатию и растяжению соответственно

В обозначениях инвариантов тензора напряжений критерий прочности:

$$\sigma_i^2 = R_bR_{bt} + 3\sigma(R_b - R_{bt})$$

где $\sigma = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)/3$ – гидростатическое давление (среднее напряжение)

$\sigma_i = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)}$ – интенсивность напряжений



Характерные точки на поверхности прочности:

1 – всестороннее растяжение: $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma = -H$; $\sigma_i = 0$, тогда предел прочности при всестороннем растяжении:

$$R'''_{bt} = H = \frac{R_b R_{bt}}{3(R_b - R_{bt})}$$

2 – одноосное растяжение: $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$;

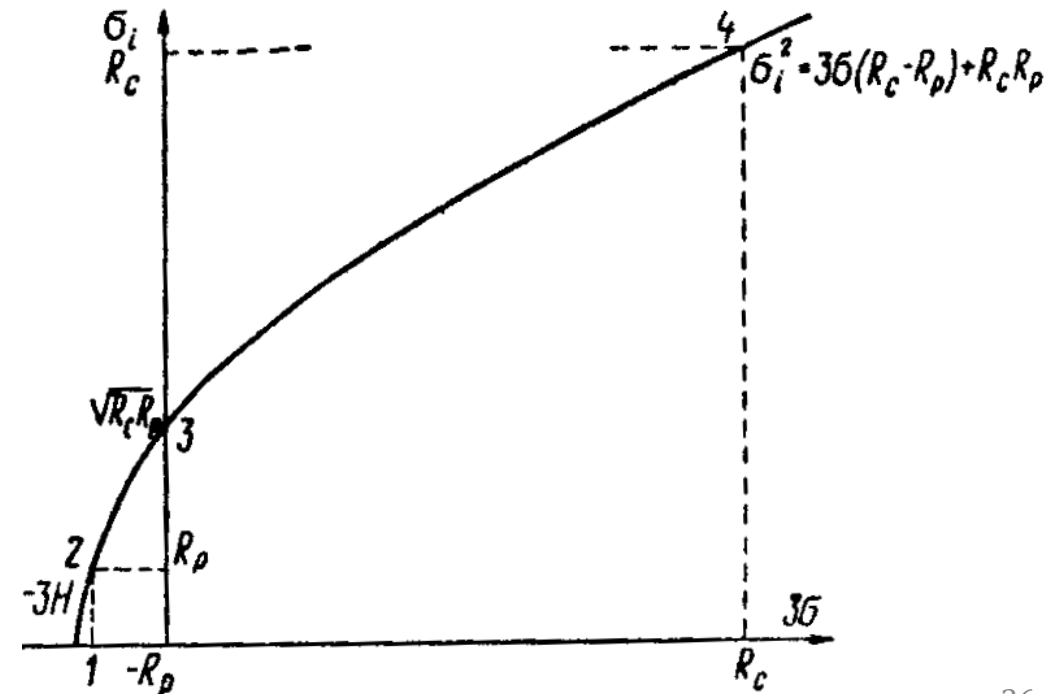
$\sigma_1 = 3\sigma = -R_{bt}$, тогда $\sigma_i = R_{bt}$

3 – чистый сдвиг: $\sigma_3 = 3\sigma = 0$; $\sigma_1 = -\sigma_2 = T$,
тогда $\sigma_i = R_{bt} = \sqrt{R_b R_{bt}} = T\sqrt{3}$

4 – одноосное сжатие: $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$;

$\sigma_1 = 3\sigma = R_b$, тогда $\sigma_i = R_b$

Сжимающие напряжения приняты положительными, растягивающие отрицательными и $R_b = R_c$ и $R_{bt} = R_p$



Виды напряженного состояния:

Плоское напряженное состояние при $\sigma_3 = 0$ показано на рисунке, тогда:

$$\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2 - (R_b - R_{bt})(\sigma_1 + \sigma_2) - R_bR_{bt} = 0$$

при этом **в случае** $\sigma_2 = 0$, получим:

$$\sigma_1^2 - (R_b - R_{bt})\sigma_1 - R_bR_{bt} = 0 \rightarrow (\sigma_1)_1 = R_b \text{ и } (\sigma_1)_2 = -R_{bt}$$

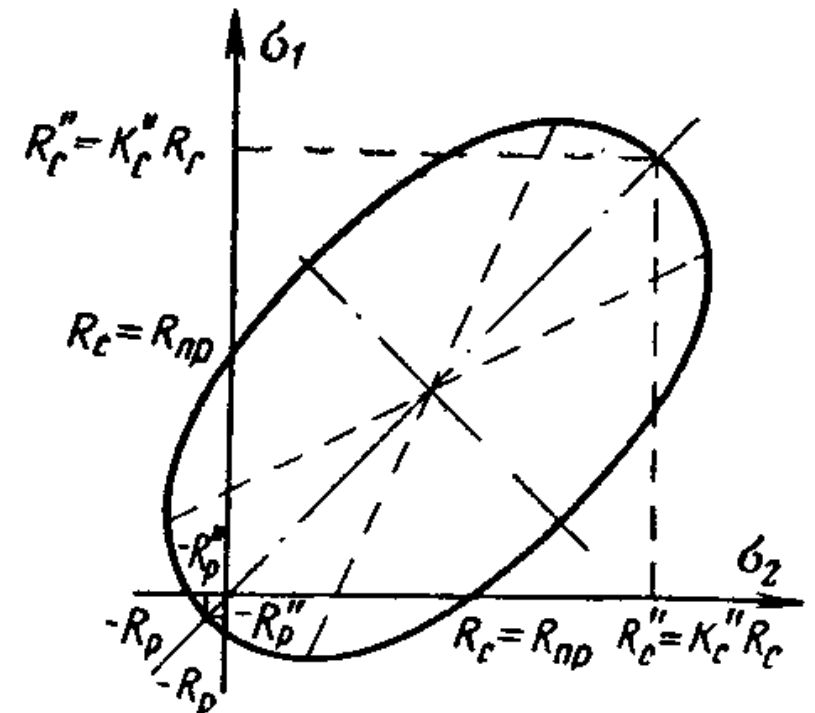
в случае $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma''$, получим:

$$\sigma'' = (R_b - R_{bt}) \pm \sqrt{R_b^2 - R_bR_{bt} + R_{bt}^2}$$

Пределы прочности при равномерном **двухосном** сжатии и растяжении:

$$R_b'' = \sigma_1'' = \sqrt{R_b^2 - R_bR_{bt} + R_{bt}^2} + (R_b - R_{bt})$$

$$R_{bt}'' = -\sigma_2'' = \sqrt{R_b^2 - R_bR_{bt} + R_{bt}^2} - (R_b - R_{bt})$$



Теория прочности бетона Вильяма-Варнка

Бетон **растрескивается** (при растяжении) или **раздрабливается** (при сжатии) при выполнении условия:

$$\frac{F}{f_c} - S \geq 0 \quad \text{или} \quad \frac{F}{R_b} - S \geq 0$$

где F – функция состояния главных напряжений $\sigma_{xp}, \sigma_{yp}, \sigma_{zp}$

S – поверхность разрушения, выраженная в компонентах главных напряжений и пятью параметрами $f_t, f_c, f_{cb}, f_1, f_2$:

$f_t = R_{bt}$ – предельная прочность при одноосном растяжении

$f_c = R_b$ – предельная прочность при одноосном сжатии

$f_{cb} = R_b''$ – предельная прочность при двухосном сжатии

f_1 и f_2 – предельная прочность при двухосном и одноосном сжатии соответственно, наложенном на гидростатическое напряжение σ_h^a



Случаи разрушения бетона:

- **Случай 1:** $0 \geq \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ (сжатие-сжатие-сжатие)
- **Случай 2:** $\sigma_1 \geq 0 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ (растяжение-сжатие-сжатие)
- **Случай 3:** $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq 0 \geq \sigma_3$ (растяжение-растяжение-сжатие)
- **Случай 4:** $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 \geq 0$ (растяжение-растяжение-растяжение)

где $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ – главные напряжения

$f_t = R_{bt}$ – предельная прочность при одноосном растяжении

$f_c = R_b$ – предельная прочность при одноосном сжатии

$f_{cb} = R_b'' = 1,2R_b$ – предельная прочность при двухосном сжатии

$f_1 = 1,45R_b$ и $f_2 = 1,725R_b$ – предельная прочность при двухосном и одноосном сжатии соответственно, наложенном на гидростатическое напряжение σ_h^a



Поверхность разрушения:

И критерий прочности для **случая 1**: $0 \geq \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ (сжатие-сжатие-сжатие):

$$F = F_1 = \frac{1}{\sqrt{15}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}$$

$$S = S_1 = \frac{2r_2(r_2^2 - r_1^2) \cos \eta + r_2(2r_1 - r_2) \sqrt{4(r_2^2 - r_1^2) \cos^2 \eta + 5r_1^2 - 4r_1 \cdot r_2}}{4(r_2^2 - r_1^2) \cos^2 \eta + (r_2 - 2r_1)^2}$$

где $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ – главные напряжения

$$\cos \eta = \frac{2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}}$$

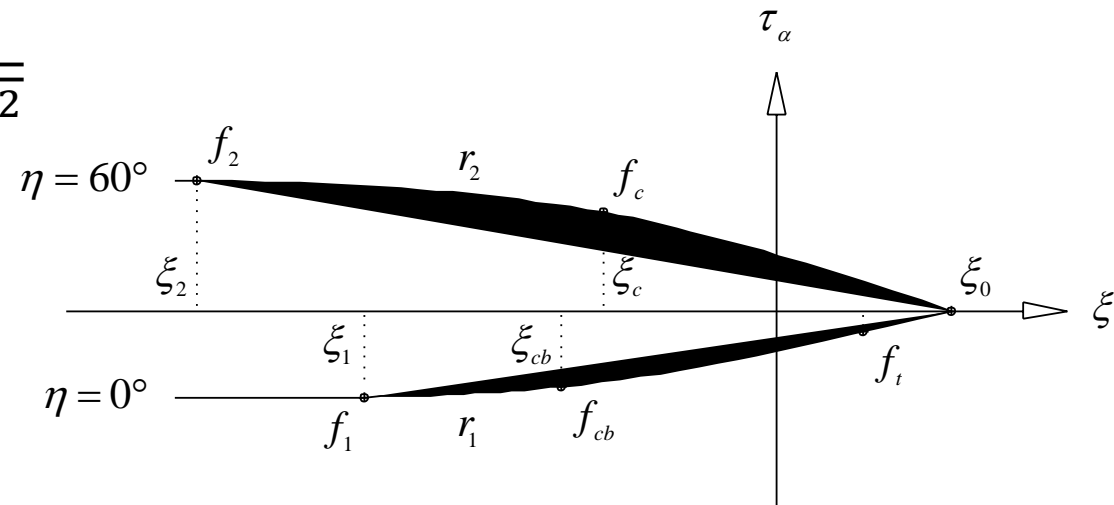
$$r_1 = a_0 + a_1 \cdot \xi + a_2 \cdot \xi^2$$

$$r_2 = b_0 + b_1 \cdot \xi + b_2 \cdot \xi^2$$

$$\xi = \sigma_h / R_b$$

$$\text{при } |\sigma_h| = (\sigma_{xp} + \sigma_{yp} + \sigma_{zp}) / 3 \leq \sqrt{3} \cdot R_b$$

σ_h – гидростатическое давление (среднее напряжение)



Сечение вдоль поверхности разрушения при трехосном НДС

Поверхность разрушения:

И критерий прочности для **случая 2**: $\sigma_1 \geq 0 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ (растяжение-сжатие-сжатие):

$$F = F_2 = \frac{1}{\sqrt{15}} \sqrt{(\sigma_2 - \sigma_3)^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2}$$

$$S = S_2 = \left(1 - \frac{\sigma_1}{R_{bt}}\right) \frac{2p_2(p_2^2 - p_1^2) \cos \eta + p_2(2p_1 - p_2) \sqrt{4(p_2^2 - p_1^2) \cos^2 \eta + 5p_1^2 - 4p_1 \cdot p_2}}{4(p_2^2 - p_1^2) \cos^2 \eta + (p_2 - 2p_1)^2}$$

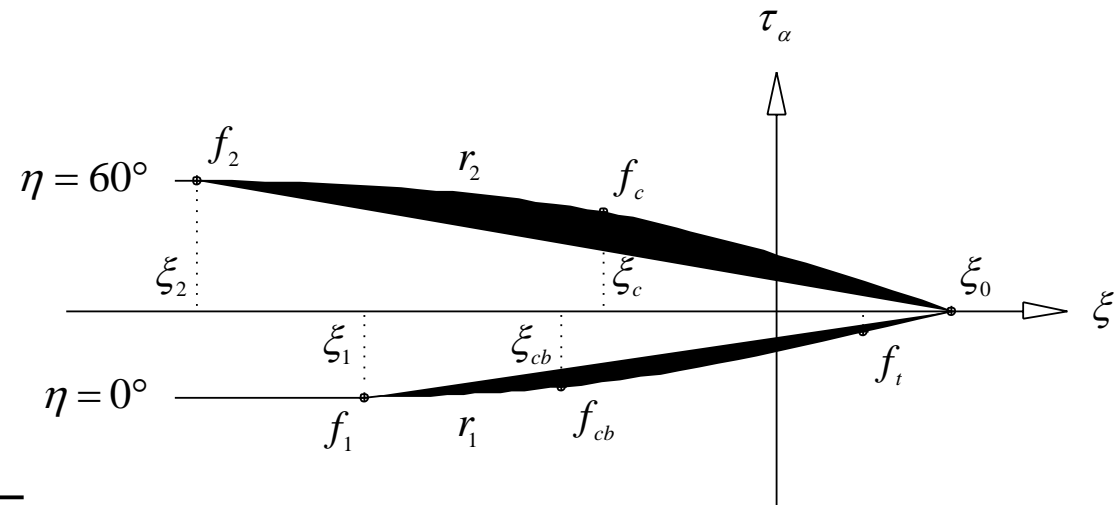
где $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ – главные напряжения

$$p_1 = a_0 + a_1 \cdot \chi + a_2 \cdot \chi^2$$

$$p_2 = b_0 + b_1 \cdot \chi + b_2 \cdot \chi^2$$

$$\chi = \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{3R_b} \quad \text{при } |\sigma_h| \leq \sqrt{3} \cdot R_b$$

$$\cos \eta = \frac{2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}}$$



Сечение вдоль поверхности разрушения при трехосном НДС

Поверхность разрушения:

И критерий прочности для **случая 3**: $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq 0 \geq \sigma_3$ (растяжение-растяжение-сжатие):

$$F = F_3 = \sigma_i; \quad i = 1, 2$$

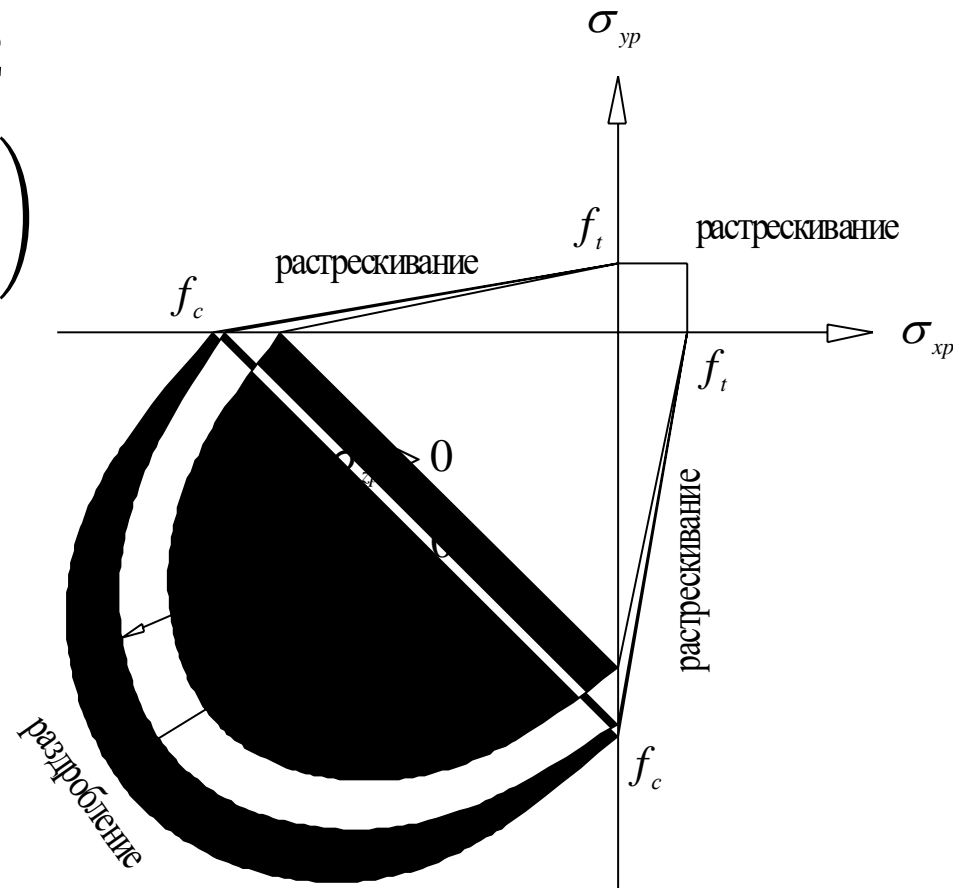
$$S = S_3 = \frac{R_{bt}}{R_b} \left(1 + \frac{\sigma_3}{R_b} \right)$$

и для **случая 4**: $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 \geq 0$ (растяжение-растяжение-растяжение):

$$F = F_4 = \sigma_i; \quad i = 1, 2, 3$$

$$S = S_4 = \frac{R_{bt}}{R_b}$$

где $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ – главные напряжения



Поверхность разрушения
для двухосного НДС

Особенности теории прочности Вильяма-Варнка

Функции F (состояния главных напряжений) и S (поверхности разрушения) выражаются в компонентах главных напряжений $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ и при этом учитываются следующие условия:

$$\sigma_1 = \max(\sigma_{xp}, \sigma_{yp}, \sigma_{zp}), \quad \sigma_3 = \min(\sigma_{xp}, \sigma_{yp}, \sigma_{zp}), \quad \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$$

В каждом из приведенных случаев НДС для описания F и S используются независимые функции: F_1, F_2, F_3, F_4 и S_1, S_2, S_3, S_4

Функции S_i ($i = 1 \dots 4$), описывающие поверхность разрушения, являются непрерывными, при этом градиенты поверхности не являются непрерывными, если любое главное напряжение меняет знак

Литература:

- СП 63.13330.2018 Бетонные и железобетонные конструкции
- СП 20.13330.2016 Нагрузки и воздействия
- СП 22.13330.2016 Основания зданий и сооружений
- Гениев Г.А., Киссюк В.Н., Тюпин В.А. Теория пластичности бетона и железобетона. – М.: Стройиздат, 1974. – 316 с.
- Безухов Н.И. Основы теории упругости, пластичности и ползучести – Издание второе. – М.: Высшая школа, 1968. – 512 с.

ИСА | 08.03.01 | ПГС | 6-й семестр

Железобетонные и каменные конструкции

Практическое занятие №8



НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ

**СТРОИТЕЛЬНЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ**

[www: mgsu.ru/universityabout/Struktura/Kafedri/ZhBK/](http://www.mgsu.ru/universityabout/Struktura/Kafedri/ZhBK/)

e-mail: gbk@mgsu.ru; PekinDA@mgsu.ru

тел.: +7 495 287 49 14 доб. 3036, 3084

Пекин Дмитрий Анатольевич, доцент, к.т.н.