

ИСА | 08.03.01 | ПГС | 6-й семестр

Железобетонные и каменные конструкции

Практическое занятие №7



НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ

**СТРОИТЕЛЬНЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ**

www: mgsu.ru/universityabout/Struktura/Kafedri/ZhBK/

e-mail: gbk@mgsu.ru; PekinDA@mgsu.ru

тел.: +7 495 287 49 14 доб. 3036, 3084

Пекин Дмитрий Анатольевич, доцент, к.т.н.

Практическое занятие №7 – краткий обзор:

Расчет железобетонных элементов по II предельному состоянию:

- Общие положения
- Ограничение деформаций (перемещений)

Общие положения расчета ЖБК по II группе ПС

Выполняется комплекс расчетов на действие изгибающих моментов и продольных сил в нормальных сечениях:

- На основе нелинейной деформационной модели согласно 8.2.14, 8.2.32, 6.1.24-6.1.26, 8.1.20-8.1.30 СП 63.13330, но с учетом сопротивления бетона растяжению
- На основе линейного расчета для элементов простого сечения (прямоугольного, таврового или двутаврового) с арматурой, расположенной вдоль граней, при учете изменения геометрических характеристик сечения, пластической работы бетона и ползучести в сжатой зоне бетона согласно 8.2.10-8.2.13, 8.2.15-8.2.31 СП 63.13330

Расчет ЖБК с использованием НДМ (п. 8.2.14 СП 63)

Нелинейной деформационной модели производят на основе диаграмм состояния (σ - ϵ) бетона и арматуры с учетом следующих положений:

- Распределение относительных деформаций бетона и арматуры по высоте сечения принимают по линейному закону (гипотеза плоских сечений)
- Связь между осевыми напряжениями и относительными деформациями бетона и арматуры принимают в виде диаграмм состояния бетона и арматуры
- Учитывается сопротивление растянутого бетона
- Критериями соответствия II группе ПС являются недопущение образования трещин, ограничения ширины раскрытия трещин и деформаций (перемещений)

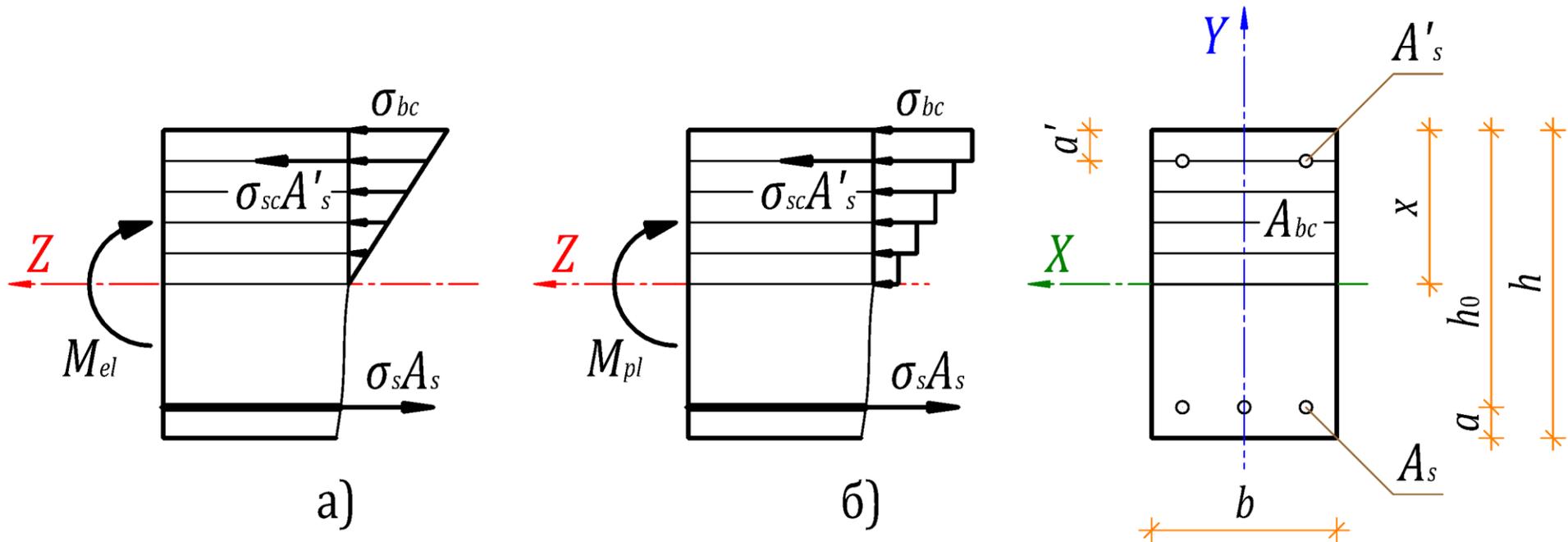
Расчет ЖБК простого сечения (п. 8.2.10, 8.2.27 СП 63)

Выполняется в неблагоприятных нормальных сечениях на основе определения фактически действующих усилий в бетоне и арматуре с учетом следующих положений:

- Сечения после деформирования остаются **плоскими**
- Эпюру напряжений в сжатой зоне бетона принимают **треугольной** формы, как для упругого тела
- Эпюру напряжений в растянутой зоне бетона принимают **трапециевидной** формы с напряжениями и деформациями, не превышающими $R_{bt,ser}$ и $\varepsilon_{bt,ult}$ соответственно (при расчете по недопущению образования трещин)
- Работу растянутого бетона в сечениях с трещиной не учитывают, а между ними учитывают с помощью коэффициента ψ_s (при расчете по ограничению ширины раскрытия трещин)
- Напряжения в арматуре принимают в зависимости от относительных деформаций, как для упругого тела

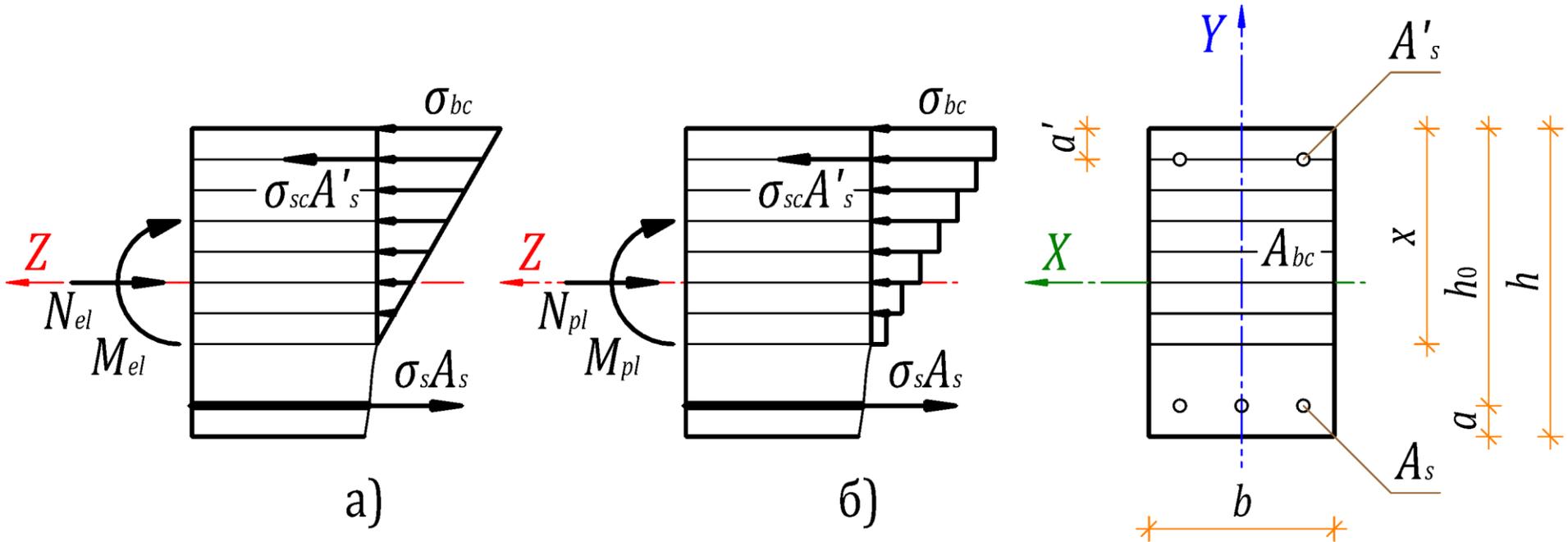
Эпюры нормальных напряжений в сечении с трещиной:

- а) – эпюра, принимаемая для расчетов изгибаемых ЖБК простого сечения после выполнения линейных расчетов
- б) – эпюра, принимаемая для расчетов изгибаемых ЖБК на основе нелинейной деформационной модели



Эпюры нормальных напряжений в сечении с трещиной:

- а) – эпюра, принимаемая для расчетов внецентренно сжатых ЖБК простого сечения после выполнения линейных расчетов
- б) – эпюра, принимаемая для расчетов внецентренно сжатых ЖБК на основе нелинейной деформационной модели



Геометрические характеристики (п. 8.2.12 СП 63)

Площадь приведенного поперечного сечения элемента определяется по формуле:

$$A_{red} = A + \alpha A_s + \alpha A'_s$$

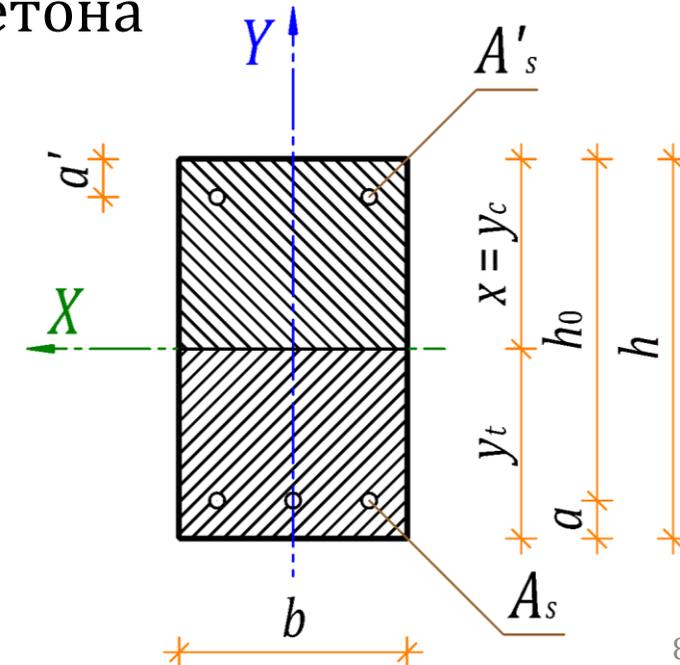
где A , A_s и A'_s – площадь сечений бетона, растянутой и сжатой арматуры

Статический момент площади приведенного поперечного сечения элемента относительно наиболее растянутого волокна бетона определяется по формуле:

$$S_{x,t,red} = Ah/2 + \alpha A_s a + \alpha A'_s (h - a')$$

Расстояние от наиболее растянутого волокна бетона до центра тяжести приведенного поперечного сечения элемента:

$$y_t = \frac{S_{x,t,red}}{A_{red}} = \frac{Ah/2 + \alpha A_s a + \alpha A'_s (h - a')}{A + \alpha A_s + \alpha A'_s}$$



Геометрические характеристики (п. 8.2.27 СП 63)

Площадь приведенного поперечного сечения элемента с трещиной определяется по формуле:

$$A_{red} = A_b + \alpha_{s2}A_s + \alpha_{s1}A'_s$$

где A_s , A'_s и $A_b = bx$ – площадь сечений растянутой и сжатых арматуры и бетона

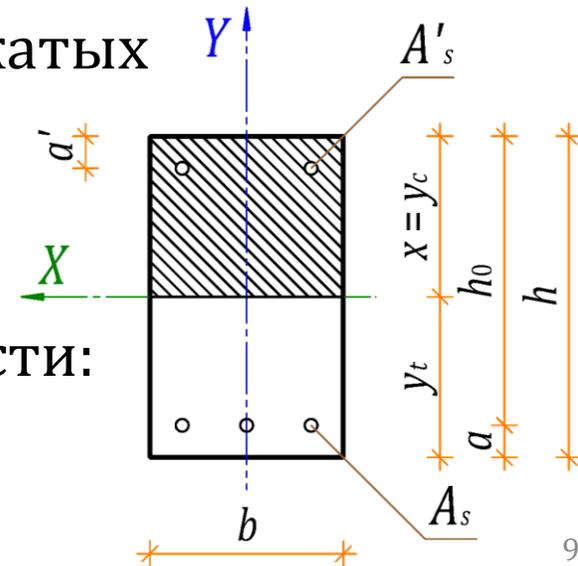
Момент инерции приведенного поперечного сечения элемента с трещиной определяется по формуле:

$$I_{x,red} = I_{x,b} + \alpha_{s2}I_{x,s} + \alpha_{s1}I'_{x,s}$$

где $I_{x,s}$, $I'_{x,s}$ и $I_{x,b}$ – моменты инерции сечений растянутой и сжатых арматуры и бетона, соответственно

Высоту сжатой зоны бетона в изгибаемых элементах определяют на основе равенства нулю статического момента поперечного сечения с трещиной относительно центра тяжести:

$$S_{x,b0} + \alpha_{s1}S'_{x,s0} = \alpha_{s2}S_{x,s0}$$



Высота сжатой зоны бетона (п. 8.2.28 СП 63)

В изгибаемых элементах находится на основе решения квадратного уравнения относительно x :

$$bx^2 + 2(\alpha_{s1}A'_s + \alpha_{s2}A_s)x - 2(\alpha_{s1}A'_sa' + \alpha_{s2}A_sh_0) = 0$$

$$x = \frac{\sqrt{(\alpha_{s1}A'_s + \alpha_{s2}A_s)^2 + 2b(\alpha_{s1}A'_sa' + \alpha_{s2}A_sh_0)} - (\alpha_{s1}A'_s + \alpha_{s2}A_s)}{b}$$

$$x = h_0 \left[\sqrt{(\alpha_{s1}\mu'_s + \alpha_{s2}\mu_s)^2 + 2(\alpha_{s1}\mu'_s \frac{a'}{h_0} + \alpha_{s2}\mu_s)} - (\alpha_{s1}\mu'_s + \alpha_{s2}\mu_s) \right]$$

Высота сжатой зоны бетона в изгибаемых элементах таврового сечения:

$$x = h_0 \left[\sqrt{(\alpha_{s1}\mu'_s + \alpha_{s2}\mu_s + \mu'_f)^2 + 2 \left(\alpha_{s1}\mu'_s \frac{a'}{h_0} + \alpha_{s2}\mu_s + \mu'_f \frac{h'_f}{2h_0} \right)} - (\alpha_{s1}\mu'_s + \alpha_{s2}\mu_s + \mu'_f) \right]$$

где $\mu_s = A_s/(bh_0)$ и $\mu'_s = A'_s/(bh_0)$ – проценты армирования
 $\mu'_f = A'_f/(bh_0)$, A'_f – площадь сечения свесов сжатой полки

Моменты инерции сжатой зоны бетона (п. 8.2.27 СП 63)

В прямоугольных и тавровых сечениях с трещиной в изгибаемых элементах определяются по следующим формулам:

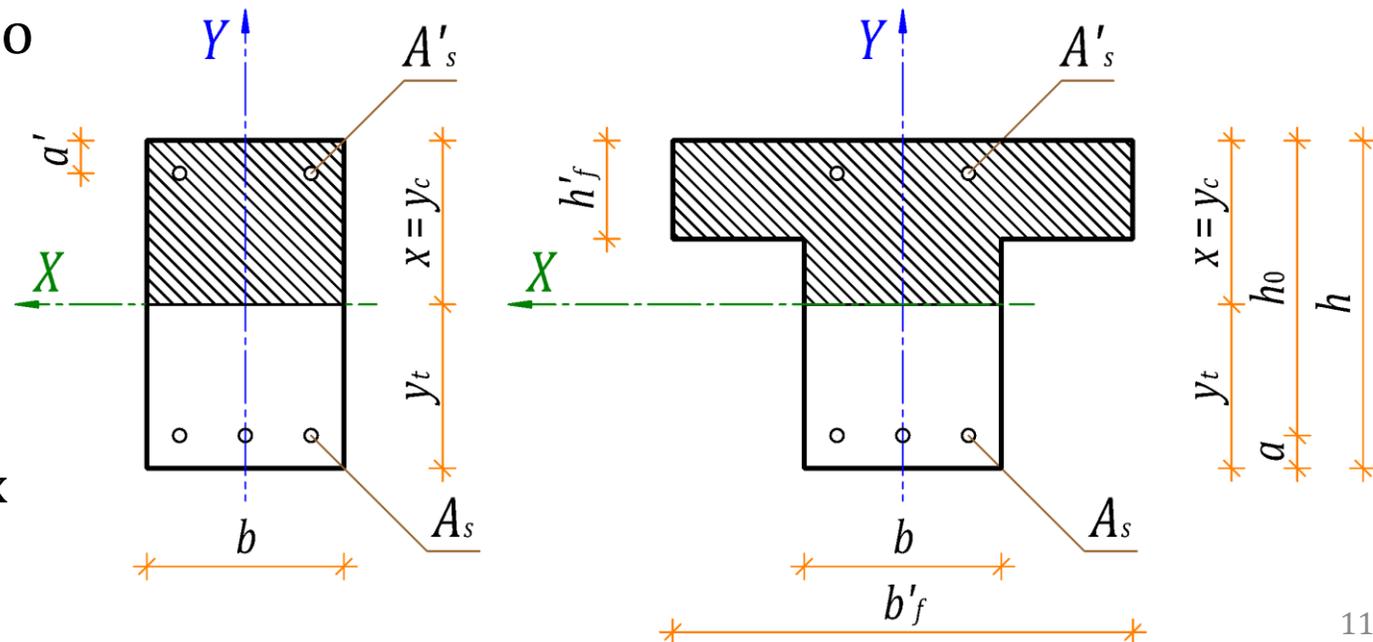
$$I_{x,b} = \frac{bx^3}{12} + \frac{bx^3}{4} = \frac{bx^3}{3} \quad \text{и} \quad I_{x,b} = \frac{bx^3}{3} + \frac{(b'_f - b)h_f'^3}{12} + (b'_f - b)h'_f \left(x - \frac{h'_f}{2}\right)^2$$

Моменты инерции растянутой и сжатой арматуры определяются по формулам:

$$I_{x,s} = A_s(h_0 - x)^2$$

$$I'_{x,s} = A'_s(x - a')^2$$

Моменты инерции арматуры относительно собственных центральных осей пренебрегают в силу их малости



Коэффициенты приведения α_{s1} и α_{s2} (п. 8.2.30 СП 63)

Арматуры к бетону определяются по следующим формулам:

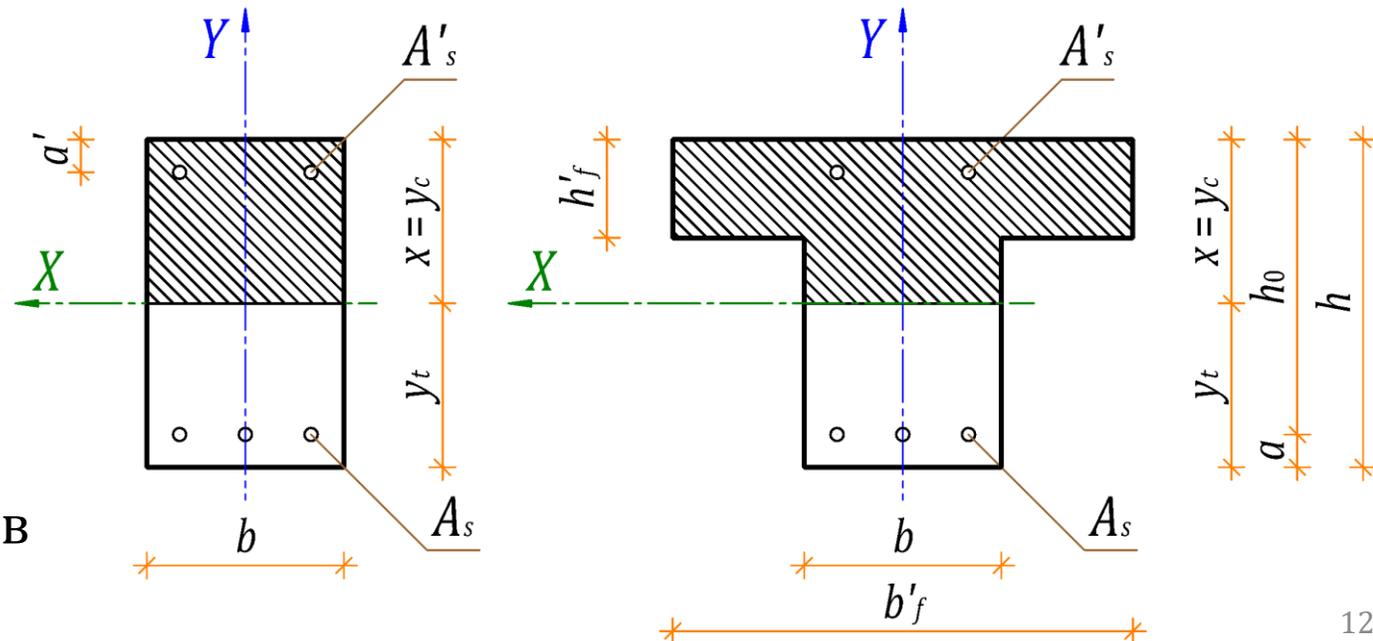
$$\alpha_{s1} = \frac{E_s}{E_{b,red}} - \text{для сжатой} \quad \text{и} \quad \alpha_{s2} = \frac{E_{s,red}}{E_{b,red}} - \text{для растянутой}$$

$E_{b,red} = \frac{R_{b,ser}}{\varepsilon_{b1,red}}$ – приведенный
модуль деформации сжатого бетона

$\varepsilon_{b1,red} = 0,0015$ – относительная
приведенная деформация бетона

$E_{s,red} = \frac{E_s}{\psi_s}$ – приведенный модуль
деформации растянутой арматуры с
учетом влияния работы растянутого
бетона между трещинами

$\alpha_{s2} = \alpha_{s1}$ – для изгибаемых элементов



Расчет по прогибам (п. 8.2.21-8.2.22 СП 63)

С учетом продолжительности действия нагрузки производят из условия:

$$f \leq f_{ult}$$

где f – прогиб железобетонного элемента от действия внешней нагрузки

f_{ult} – предельно допустимый прогиб согласно п. 15 СП 20.13330

Прогибы железобетонных элементов в расчетных моделях определяются различными методами строительной механики с учетом фактических геометрических характеристик поперечных сечений, напряженно-деформированного состояния и механических свойств бетона и арматуры

Кривизна ЖБЭ (п. 8.2.25 СП 63)

От действия соответствующих нагрузок определяется по формуле:

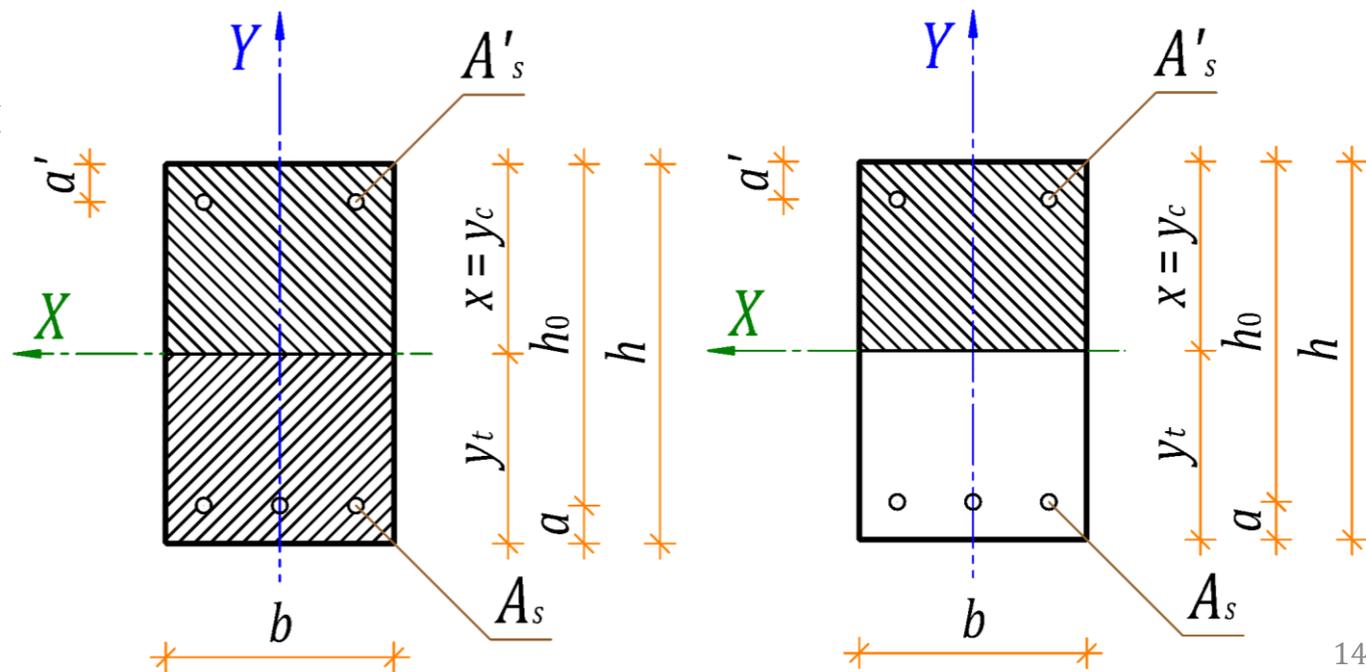
$$\frac{1}{r} = \frac{M}{D}$$

где M – изгибающий момент от соответствующей внешней нагрузки

$D = E_{b1} I_{red}$ – изгибная жесткость приведенного поперечного сечения элемента

E_{b1} – модуль деформации сжатого бетона, определяемый в зависимости от **продолжительности** действия нагрузки и с учетом **наличия** или **отсутствия** трещин

I_{red} – момент инерции приведенного поперечного сечения относительно его центра тяжести, определяемый с учетом **наличия** или **отсутствия** трещин



Кривизной K плоской кривой

В ее точке C называется предел отношения острого угла $\Delta\theta$ (угол смежности) между касательными кривой в точках C и E к длине дуги кривой $\overline{CE} = \Delta s$, когда точка $E \rightarrow C$, т. е.:

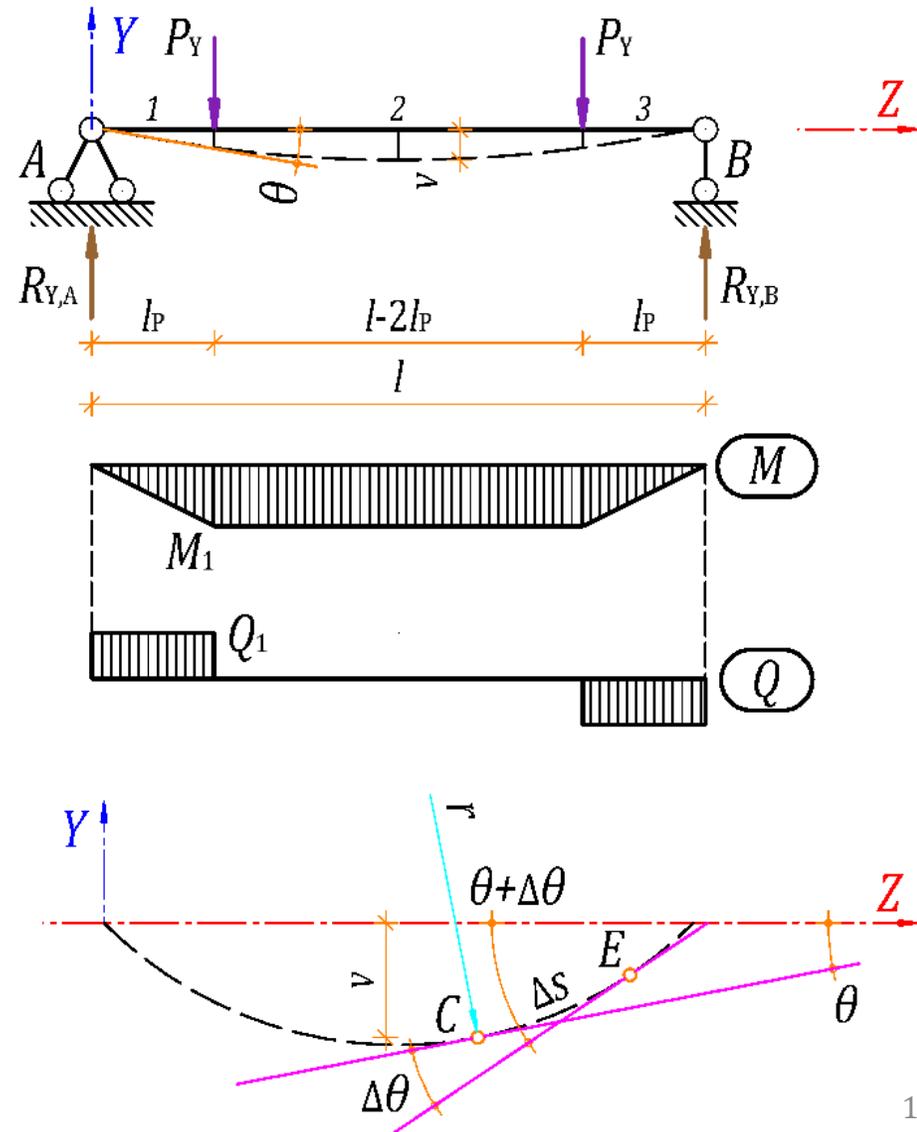
$$|K| = \frac{1}{r} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta s} = \frac{d\theta}{ds} = \frac{v''}{\sqrt{(1 + v'^2)^3}}$$

где θ – острый угол между касательной кривой в точке C и осью Z ; r – радиус кривизны

При малых прогибах принимается, что:

$$\theta \cong \text{tg}\theta = \frac{dy}{dz} = \frac{dv}{dl} = v',$$

$$\text{тогда } v'^2 \rightarrow 0 \text{ и } K = \frac{1}{r} = v'' = \frac{M}{D} = \frac{M}{E \cdot I}$$



Кривизна при чистом изгибе элемента с трещинами

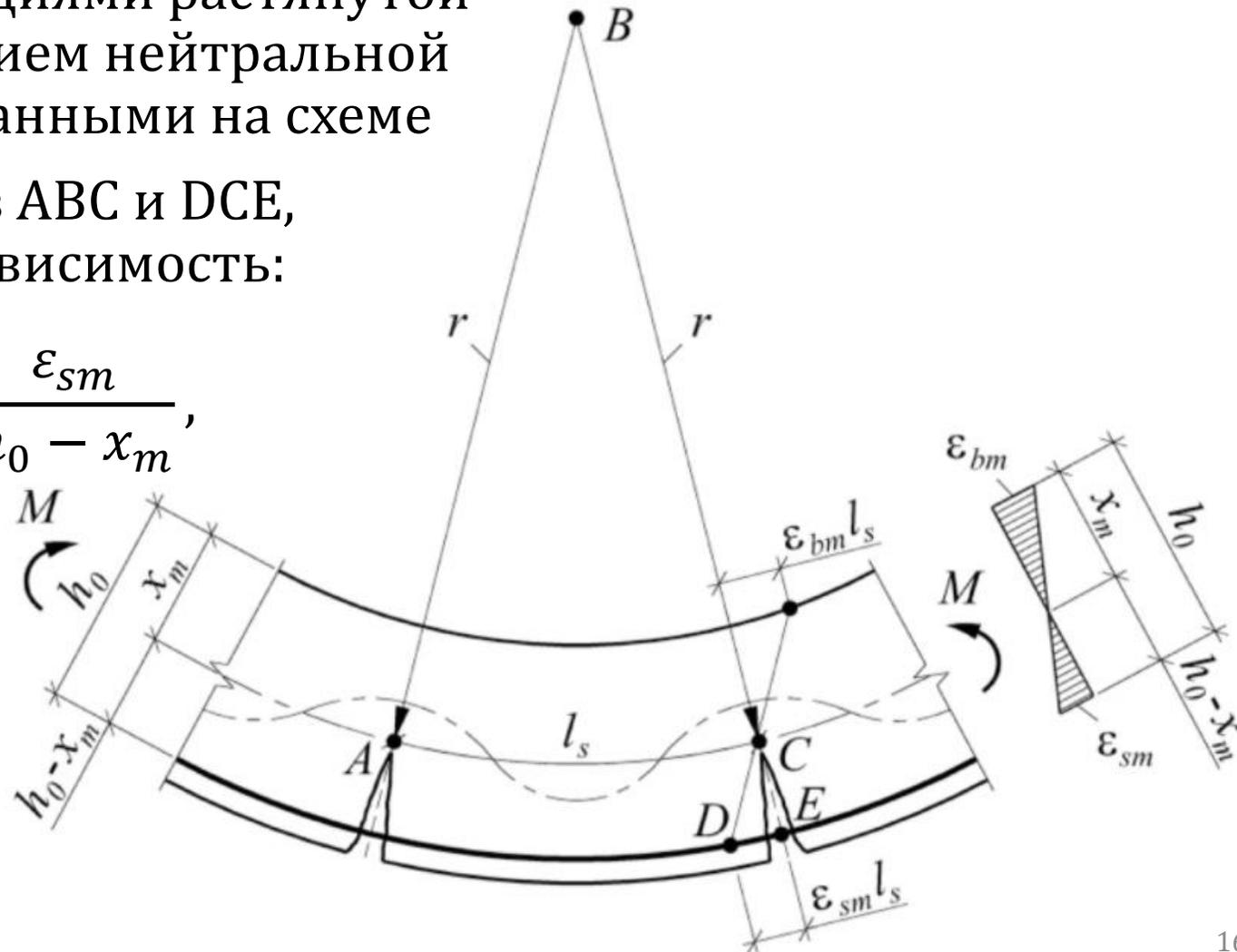
Определяется средними деформациями растянутой арматуры ε_{sm} и средним положением нейтральной оси с радиусом кривизны r , показанными на схеме

На основе подобия треугольников ABC и DCE, показанных на схеме, получена зависимость:

$$\frac{l_s}{r} = \frac{\varepsilon_{sm} \cdot l_s}{h_0 - x_m} \rightarrow \frac{1}{r} = \frac{\varepsilon_{sm}}{h_0 - x_m},$$

которая с учетом $\varepsilon_{sm} = \psi_s \cdot \varepsilon_s$ и $\varepsilon_s = \sigma_s / E_s$ преобразуется в виду:

$$\frac{1}{r} = \frac{\psi_s \cdot \varepsilon_s}{h_0 - x_m} = \frac{\psi_s \cdot \sigma_s}{E_s (h_0 - x_m)}$$



Кривизна при чистом изгибе элемента с трещинами

С учетом равновесия внутренних усилий в сечении элемента:

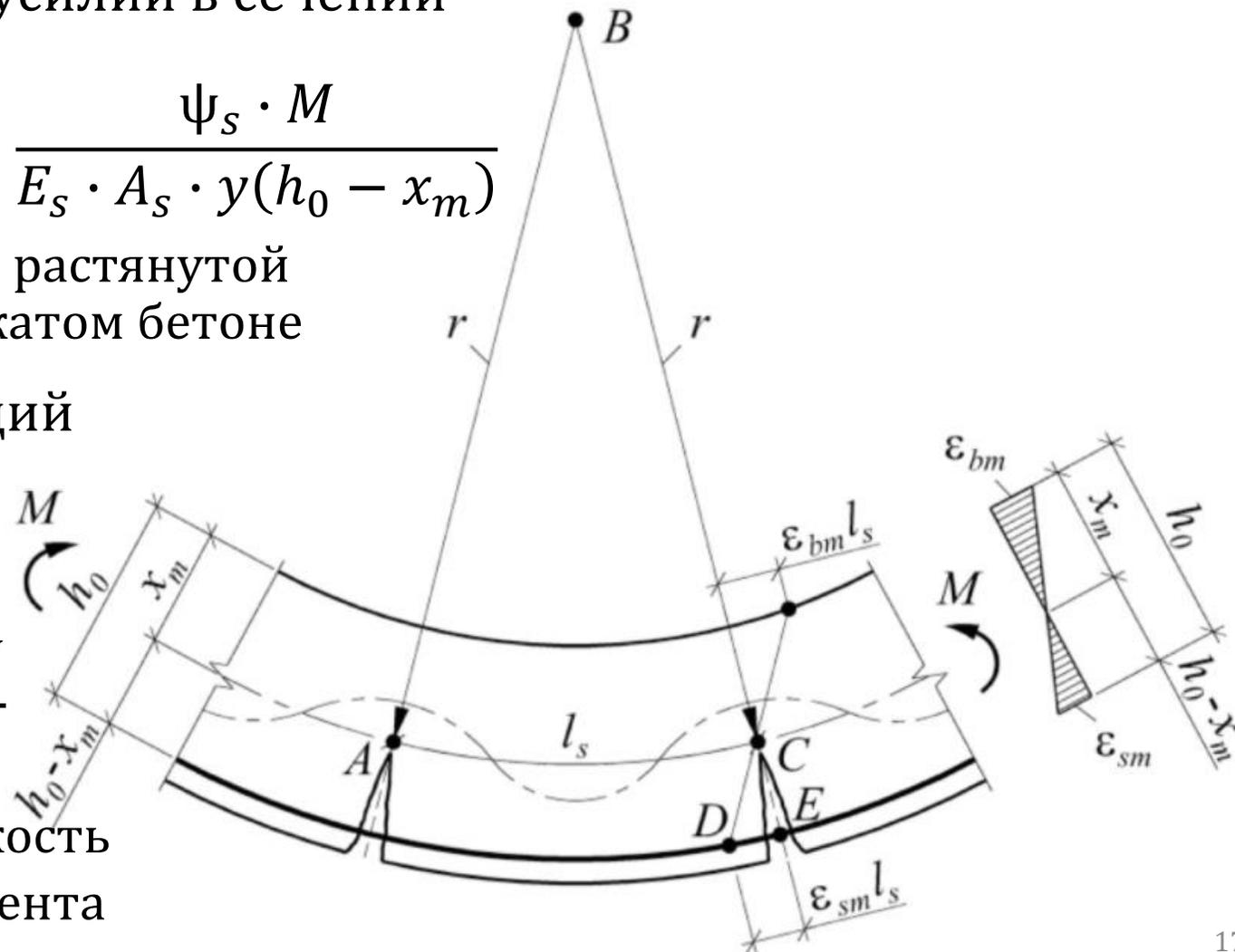
$$\sigma_s = \frac{M}{A_s \cdot y} \rightarrow \frac{1}{r} = \frac{\psi_s \cdot \sigma_s}{E_s (h_0 - x_m)} = \frac{\psi_s \cdot M}{E_s \cdot A_s \cdot y (h_0 - x_m)}$$

где y – расстояние от центра тяжести растянутой арматуры до равнодействующей в сжатом бетоне

И приведенного модуля деформаций растянутой арматуры $E_{s,red} = E_s / \psi_s$ преобразуется в виду:

$$\frac{1}{r} = \frac{M}{E_{s,red} \cdot A_s \cdot y (h_0 - x_m)} = \frac{M}{D}$$

где $D = E_{s,red} \cdot A_s \cdot y (h_0 - x_m)$ – жесткость сечения с трещиной при изгибе элемента



Полная кривизна ЖБЭ (п. 8.2.23, 8.2.24 СП 63)

И прогиб для участков **без трещин** в растянутой зоне:

$$\frac{1}{r} = \left(\frac{1}{r}\right)_1 + \left(\frac{1}{r}\right)_2 \quad \text{и} \quad f = f_1 + f_2$$

$(1/r)_1$ и f_1 , $(1/r)_2$ и f_2 – кривизны и прогибы соответственно от **непродолжительного** действия кратковременных нагрузок и от **продолжительного** действия постоянных и временных длительных нагрузок

И прогиб для участков **с трещинами** в растянутой зоне:

$$\frac{1}{r} = \left(\frac{1}{r}\right)_1 - \left(\frac{1}{r}\right)_2 + \left(\frac{1}{r}\right)_3 \quad \text{и} \quad f = f_1 - f_2 + f_3$$

где $(1/r)_1$ и f_1 – кривизна и прогиб от **непродолжительного** действия **всей** нагрузки, на которую производят расчет по деформациям

$(1/r)_2$ и f_2 – кривизна и прогиб от **непродолжительного** действия постоянных и временных длительных нагрузок

$(1/r)_3$ и f_3 – кривизна и прогиб от **продолжительного** действия постоянных и временных длительных нагрузок

Полный прогиб элементов с трещинами

Вычисляемый по формуле:

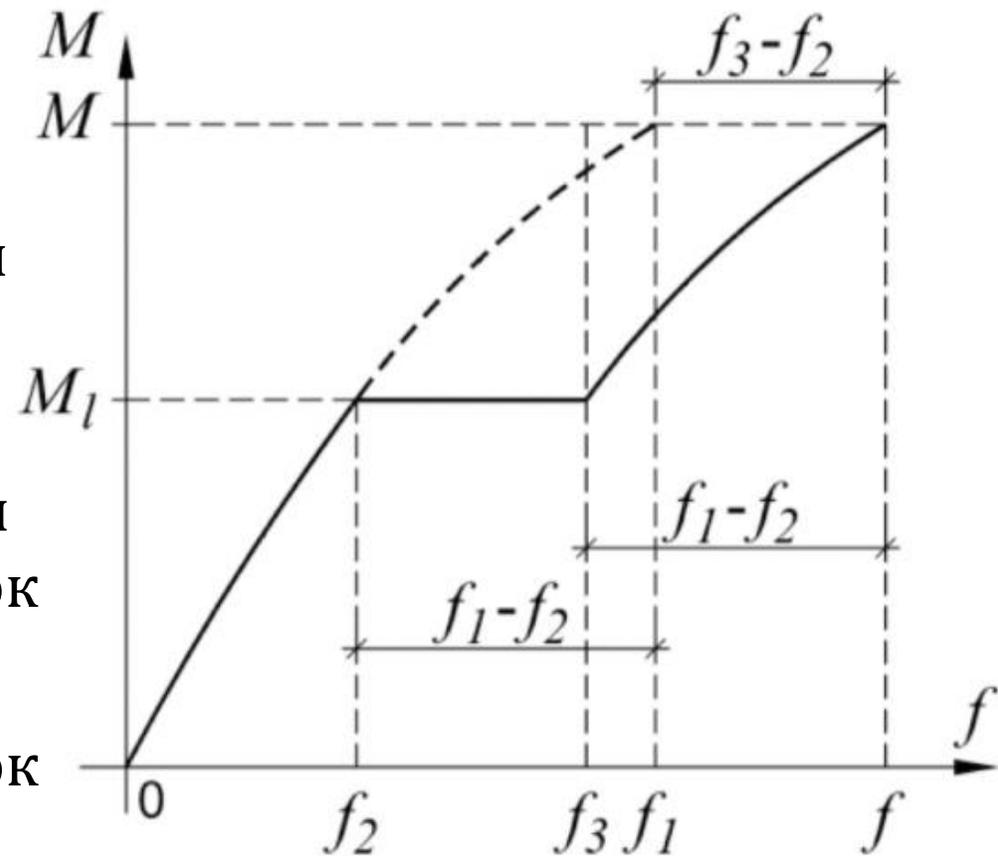
$$f = f_1 - f_2 + f_3,$$

можно проиллюстрировать с помощью представленной диаграммы, где:

f_1 – прогиб от **непродолжительного** действия **всей** нагрузки, на которую производят расчет по деформациям

f_2 – прогиб от **непродолжительного** действия постоянных и временных длительных нагрузок

f_3 – прогиб от **продолжительного** действия постоянных и временных длительных нагрузок



Жесткость ЖБЭ на участке без трещин (п. 8.2.26 СП 63)

И момент инерции приведенного поперечного сечения элемента относительно его центра тяжести определяется как для сплошного тела по формуле:

$$D = E_{b1} I_{x,red} \quad \text{и} \quad I_{x,red} = I_x + \alpha I_{x,s} + \alpha I'_{x,s}$$

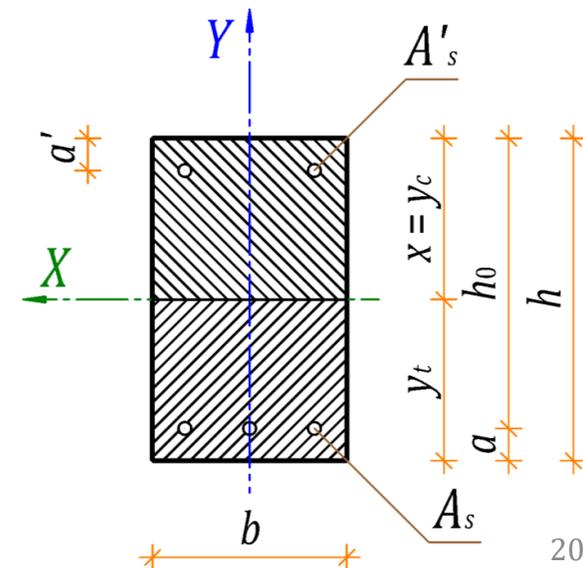
где $I_x = \frac{bh^3}{12}$, $I_{x,s} = A_s (y_t - a)^2$ и $I'_{x,s} = A'_s (y_c - a')^2$ – моменты инерции сечений бетона, растянутой и сжатой арматуры соответственно

$\alpha = E_s / E_{b1}$ – коэффициент приведения арматуры к бетону

$E_{b1} = 0,85 E_b$ – при **непродолжительном** действии нагрузки

$E_{b1} = E_{b\tau} = \frac{E_b}{1 + \varphi_{b,cr}}$ – при **продолжительном** действии нагрузки

$\varphi_{b,cr}$ – коэффициент ползучести по табл. 6.12 СП 63.13330



Жесткость ЖБЭ на участке с трещинами (п. 8.2.27 СП 63)

И момент инерции приведенного поперечного сечения элемента с трещиной определяется по формуле:

$$D_{crc} = E_{b1} I_{x,red,crc} \leq D \quad \text{и} \quad I_{x,red,crc} = I_{x,b} + \alpha_{s2} I_{x,s} + \alpha_{s1} I'_{x,s}$$

где $I_{x,s}$, $I'_{x,s}$ и $I_{x,b}$ – моменты инерции сечений растянутой и сжатых арматуры и бетона, соответственно

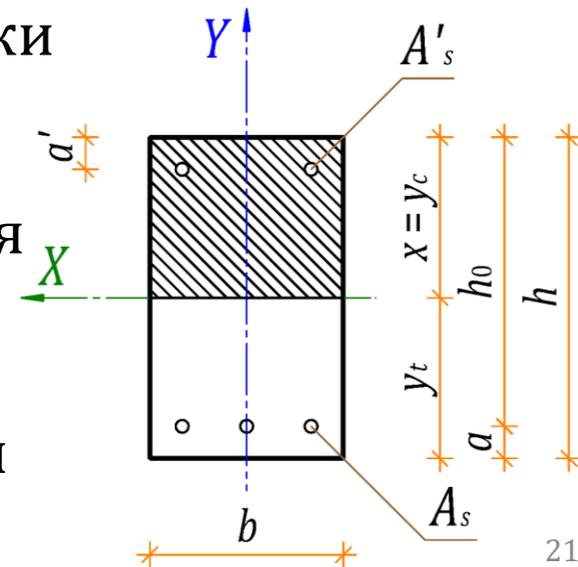
$E_{b1} = E_{b,red} = \frac{R_{b,ser}}{\varepsilon_{b1,red}}$ – приведенный модуль деформации сжатого бетона

$\varepsilon_{b1,red} = 0,0015$ – при **непродолжительном** действии нагрузки

$\varepsilon_{b1,red}$ – по табл. 6.10 СП 63 при **продолжительном** действии

Коэффициенты приведения арматуры к бетону определяются по следующим формулам:

$$\alpha_{s1} = \frac{E_s}{E_{b,red}} \quad \text{– для сжатой} \quad \text{и} \quad \alpha_{s2} = \frac{E_{s,red}}{E_{b,red}} \quad \text{– для растянутой}$$



Допускается прогибы ЖБЭ (п. 8.2.31 СП 63)

Определять с помощью методов строительной механики с использованием вместо кривизны $(1/r)$ фактических изгибных жесткостей D или D_{crc}

При совместном действии кратковременной и длительной нагрузок полный прогиб элементов без трещин и с трещинами в растянутой зоне определяют путем суммирования прогибов от соответствующих нагрузок по аналогии с суммированием кривизны

При расчете прогибов допускается принимать $\psi_s = 1$, тогда при совместном действии кратковременной и длительной нагрузок полный прогиб изгибаемых элементов **с трещинами** равен сумме прогибов от **непродолжительного** действия кратковременной нагрузки и от **продолжительного** действия длительной нагрузки с учетом соответствующих значений жесткостей D_{crc} :

$$\frac{1}{r} = \left(\frac{1}{r}\right)_1 + \left(\frac{1}{r}\right)_2$$

$(1/r)_1$, $(1/r)_2$ – кривизны соответственно от **непродолжительного** действия кратковременных нагрузок и от **продолжительного** действия постоянных и временных длительных нагрузок

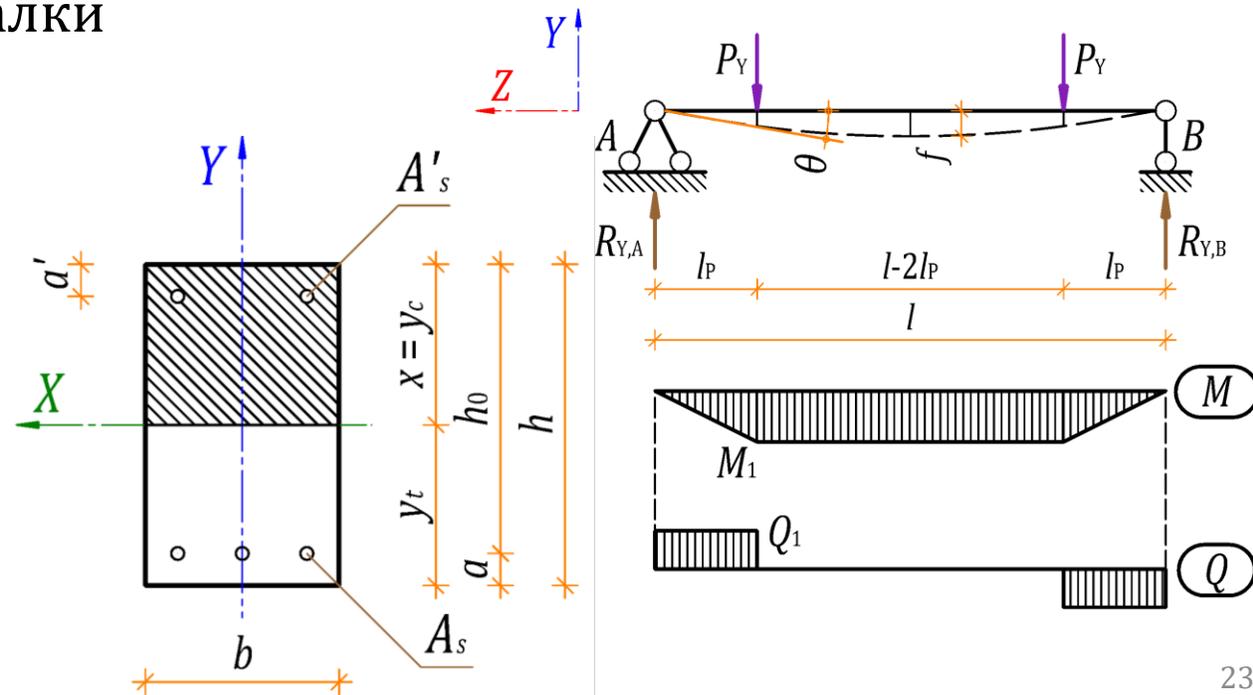
Пример 1. Расчет балки по прогибам

Дано: монолитная железобетонная балка из Примера 2, сечением $b \times h - 300 \times 500$ мм пролетом $l = 3,0$ м, изгибающий момент и опорная реакция от действия постоянных и длительно действующих нагрузок $M_{1,ser,l} = 128$ кНм и $R_{Y,A,ser} = P_{Y,ser} = 128$ кН, момент образования трещин $M_{crc} = 28,8$ кНм, моменты инерции приведенного сечения элемента без трещины $I_{x,red} = 3473 \cdot 10^{-6}$ м⁴ и с трещиной $I_{x,red,crc} = 1994 \cdot 10^{-6}$ м⁴, приведенный модуль деформации сжатого бетона $E_{b1} = E_{b,red} = 12333$ МПа, эстетико-психологические ограничения прогиба балки

Определим расстояние от опоры, где начинают образовываться нормальные трещины:

$$l_{crc} = \frac{M_{crc}}{R_{Y,A,ser}} = \frac{28,8}{128} = 0,225 \text{ м} \ll l = 3,0 \text{ м}$$

Принимаем по всей длине балки момент инерции с трещиной – $I_{x,red,crc}$



Пример 1. Прогиб балки в середине пролета

Определим максимальный прогиб данной балки (в середине пролета) от **продолжительного** действия постоянных и временных длительных нагрузок:

$$\begin{aligned} f &= U \cdot \frac{1}{r} = \frac{(3l^2 - 4l_p^2)}{24} \cdot \frac{M_{ser,l}}{D_{crc}} = \frac{(3l^2 - 4l_p^2)}{24} \cdot \frac{P_{Y,ser}l_p}{E_{b1}I_{x,red,crc}} = \\ &= \frac{(3 \cdot 3^2 - 4 \cdot 1^2)}{24} \cdot \frac{128 \cdot 1}{12333 \cdot 10^3 \cdot 1994 \cdot 10^{-6}} = \mathbf{0,005 \text{ м} = 5 \text{ мм}} \end{aligned}$$

U – коэффициент, соответствующий характеру нагружения и граничным условиям

Определим предельно допустимый прогиб балки от **продолжительного** действия постоянных и временных длительных нагрузок согласно табл. Д.1 СП 20.13330:

$$f_{ult} = \frac{l}{150} = \frac{3000}{150} = \mathbf{20 \text{ мм}}$$

Проверим выполнение условия:

$$f = \mathbf{5 \text{ мм}} \leq f_{ult} = \mathbf{20 \text{ мм}}$$

Прогибы в равнопролетных неразрезных балках

С постоянной изгибной жесткостью и шарнирными узлами на концах балки от действия равномерно распределенных нагрузок определяются в середине пролетов по формуле:

$$f_{max} = J \cdot \frac{ql^4}{EI} = J \cdot m \cdot l^2 \cdot \frac{M}{D} = U \cdot \frac{1}{r}$$

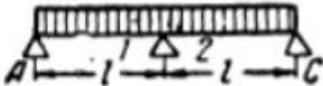
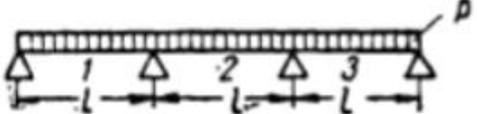
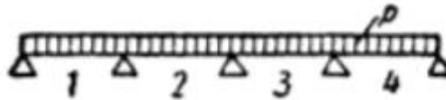
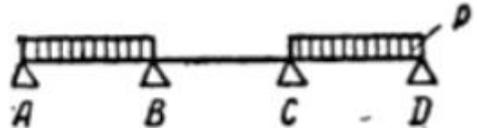
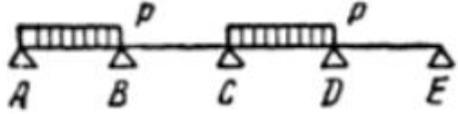
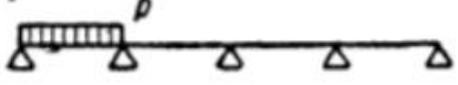
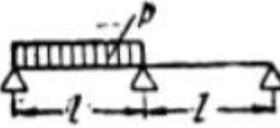
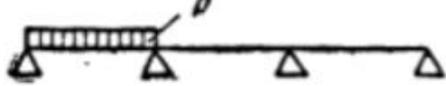
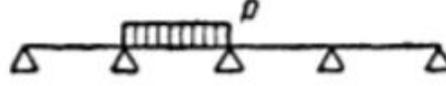
где J – коэффициент из таблицы «Справочника проектировщика» (на следующем слайде), соответствующий количеству пролетов и схеме нагрузки

$M = \frac{ql^2}{m}$ – максимальный изгибающий момент в пролете

$m = 11$ – для крайнего пролета и $m = 16$ – для второго пролета

$U = J \cdot m \cdot l^2$ – коэффициент для расчета прогибов на основе кривизны

Коэффициент J для определения прогибов

Два пролета		Три пролета			Четыре пролета			
схема нагрузки	прогиб в пролете 1	схема нагрузки	прогиб		схема нагрузки	прогиб		
			в пролете 1	в пролете 2		в пролете 1	в пролете 2	в пролете 3
	0,00520		0,00675	0,00052		0,00630	0,00190	—
			0,00987	—		0,00962	—	0,00738
			—	0,0675		0,00882	—	—
	0,00906		0,00882	—		—	0,00657	—

Прогиб статически определимой балки

Определяется путем интегрирования приближенного дифференциального уравнения изогнутой оси балки в данном случае с разбиением на три участка по длине и с учетом $R_Y = P_Y$, участок 1:

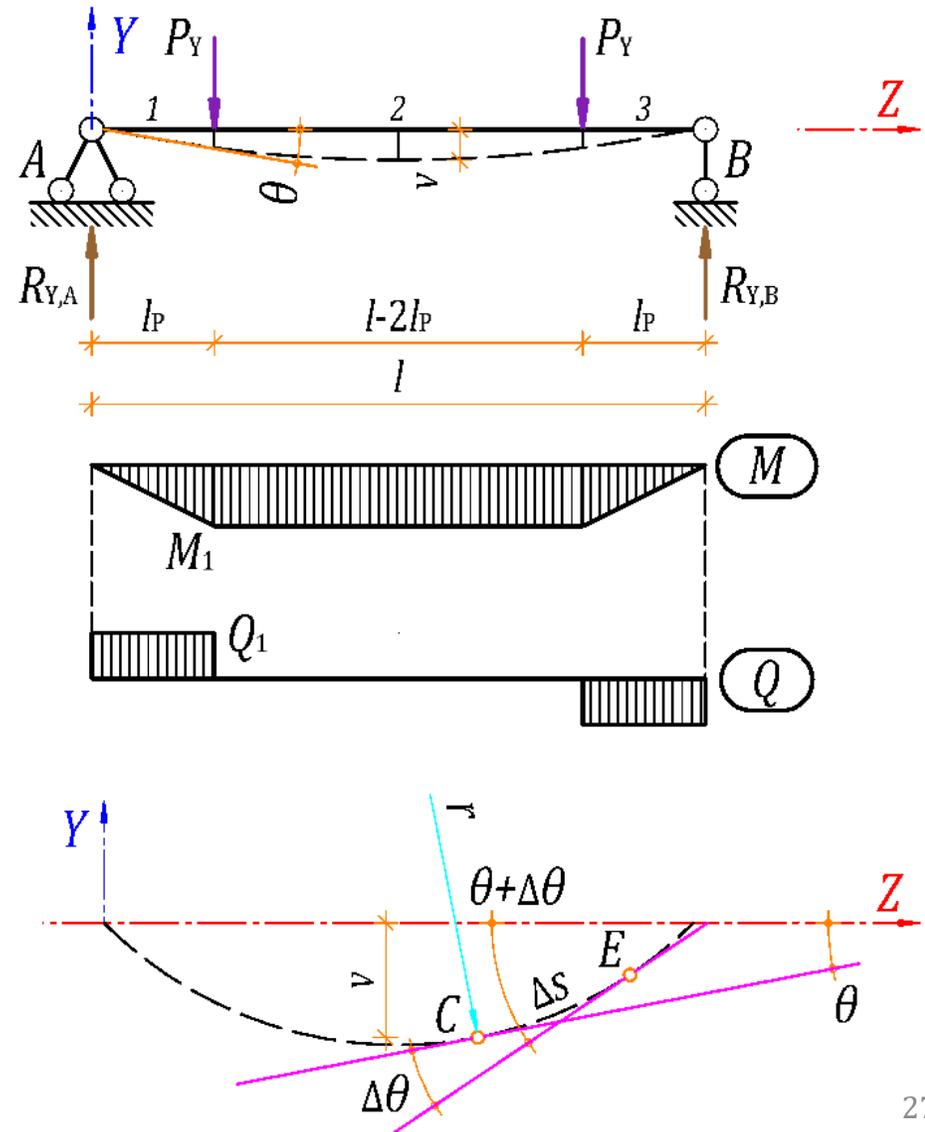
$$E \cdot I \cdot v'' = M = P_Y \cdot z$$

$$E \cdot I \cdot \frac{d(v')}{dz} = P_Y \cdot z \rightarrow E \cdot I \cdot d(v') = P_Y \cdot z \cdot dz$$

$$\int E \cdot I \cdot d(v') = \int P_Y \cdot z dz$$

$$E \cdot I \cdot v' = E \cdot I \cdot \frac{dv}{dz} = \frac{P_Y \cdot z^2}{2} + C_1$$

$$E \cdot I \cdot dv = \frac{P_Y \cdot z^2}{2} dz + C_1 dz$$



Прогиб статически определимой балки

$$\int E \cdot I dv = \int \frac{P_Y \cdot z^2}{2} dz + \int C_1 dz$$

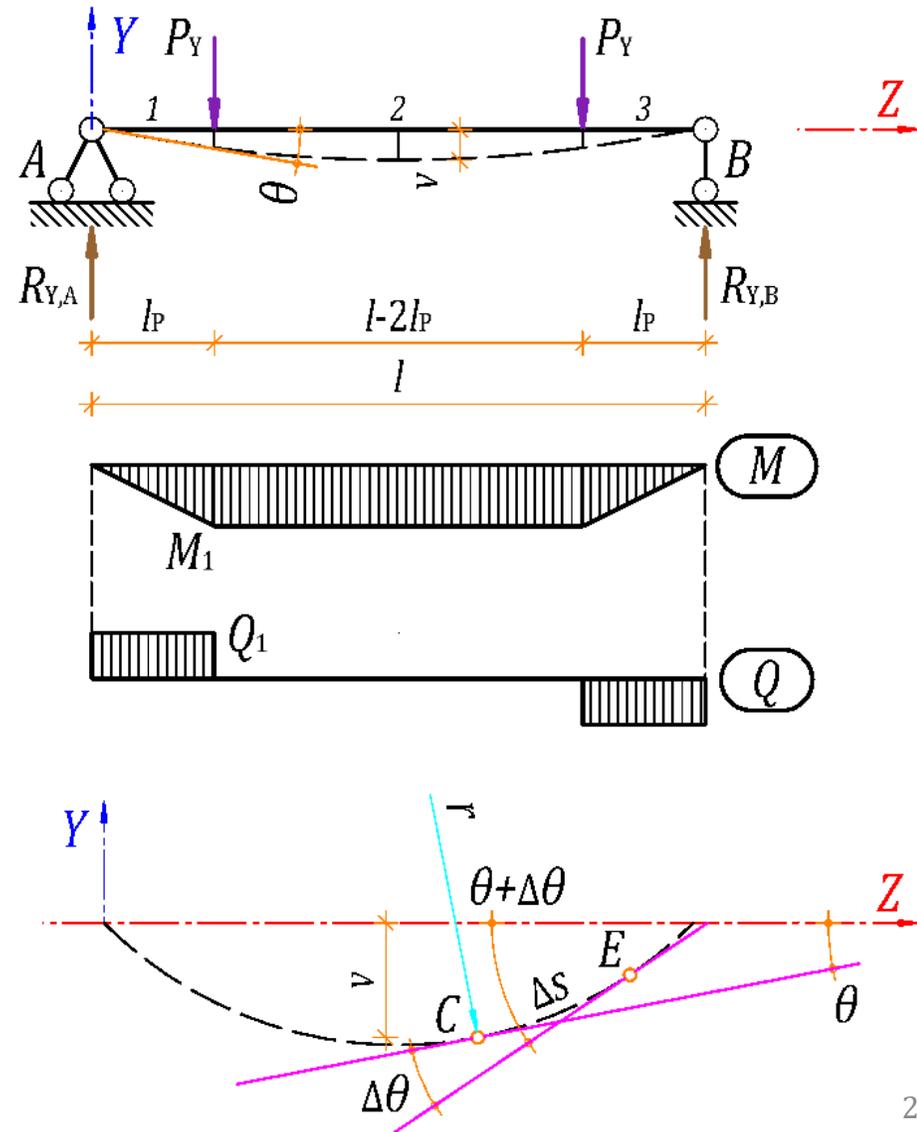
$$E \cdot I \cdot v = \frac{P_Y \cdot z^3}{6} + C_1 \cdot z + D_1$$

Повторяем процедуру для второго участка балки:

$$E \cdot I \cdot v'' = P_Y \cdot z - P_Y(z - l_P)$$

$$E \cdot I \cdot v' = \frac{P_Y \cdot z^2}{2} - \frac{P_Y(z - l_P)^2}{2} + C_2$$

$$E \cdot I \cdot v = \frac{P_Y \cdot z^3}{6} - \frac{P_Y(z - l_P)^3}{6} + C_2 \cdot z + D_2$$



Прогиб статически определимой балки

И для третьего участка балки:

$$E \cdot I \cdot v'' = P_Y \cdot z - P_Y(z - l_P) - P_Y(z - l + l_P)$$

$$E \cdot I \cdot v' = \frac{P_Y \cdot z^2}{2} - \frac{P_Y(z - l_P)^2}{2} - \frac{P_Y(z - l + l_P)^2}{2} + C_3$$

$$E \cdot I \cdot v = \frac{P_Y \cdot z^3}{6} - \frac{P_Y(z - l_P)^3}{6} - \frac{P_Y(z - l + l_P)^3}{6} + C_3 \cdot z + D_3$$

Находим постоянные интегрирования C_1 и D_1 с учетом граничных условий:

$$v_1 \Big|_{z=0} = 0,$$

$$E \cdot I \cdot v' = \frac{P_Y \cdot 0^2}{2} + C_1 = C_1 \quad \text{и} \quad E \cdot I \cdot 0 = \frac{P_Y \cdot 0^3}{6} + C_1 \cdot 0 + D_1 = D_1 \rightarrow D_1 = 0$$

Прогиб статически определимой балки

Находим постоянные интегрирования C_2 и C_3 с учетом граничных условий:

$$v'_1 \Big|_{z=l_P} = v'_2 \Big|_{z=l_P} \quad \text{и} \quad v'_2 \Big|_{z=l-l_P} = v'_3 \Big|_{z=l-l_P}$$

$$\frac{P_Y \cdot l_P^2}{2} + C_1 = \frac{P_Y \cdot l_P^2}{2} - \frac{P_Y(l_P - l_P)^2}{2} + C_2 \rightarrow C_1 = C_2$$

$$\frac{P_Y \cdot (l - l_P)^2}{2} - \frac{P_Y(l - l_P - l_P)^2}{2} + C_2 =$$

$$= \frac{P_Y \cdot (l - l_P)^2}{2} - \frac{P_Y(l - l_P - l_P)^2}{2} - \frac{P_Y(l - l_P - l + l_P)^2}{2} + C_3 \rightarrow C_2 = C_3 = C_1,$$

аналогично получаем $D_1 = D_2 = D_3 = 0$

Прогиб статически определимой балки

Находим постоянную интегрирования $C_1 = C_2 = C_3 = C$ с учетом граничных условий:

$$v_1 \Big|_{z=l} = 0,$$

$$E \cdot I \cdot 0 = \frac{P_Y \cdot l^3}{6} - \frac{P_Y(l - l_P)^3}{6} - \frac{P_Y(l - l + l_P)^3}{6} + C \cdot l + D = 0$$

$$\frac{P_Y \cdot l^3}{6} - \frac{P_Y(l - l_P)^3}{6} - \frac{P_Y l_P^3}{6} + C \cdot l = 0$$

$$\frac{P_Y(l^3 - l^3 + 3 \cdot l^2 \cdot l_P - 3 \cdot l \cdot l_P^2 + l_P^3 - l_P^3)}{6} + C \cdot l = 0$$

$$\frac{P_Y(3 \cdot l^2 \cdot l_P - 3 \cdot l \cdot l_P^2)}{6} + C \cdot l = 0 \rightarrow C = -\frac{3 \cdot P_Y \cdot l_P \cdot l(l - l_P)}{6 \cdot l} = -\frac{P_Y \cdot l_P(l - l_P)}{2}$$

Уравнение прогибов и углов поворота

Подставляя найденные постоянные интегрирования в выражения для прогибов и углов поворота на каждом участке получим, для участка 1:

$$E \cdot I \cdot v' = \frac{P_Y \cdot z^2}{2} - \frac{P_Y \cdot l_P(l - l_P)}{2} \rightarrow v' = \frac{P_Y(z^2 - l_P(l - l_P))}{2 \cdot E \cdot I}$$

$$E \cdot I \cdot v = \frac{P_Y \cdot z^3}{6} - \frac{P_Y \cdot l_P(l - l_P) \cdot z}{2} \rightarrow v = \frac{P_Y \cdot z(z^2 - 3 \cdot l_P(l - l_P))}{6 \cdot E \cdot I},$$

для участка 2:

$$E \cdot I \cdot v' = \frac{P_Y \cdot z^2}{2} - \frac{P_Y(z - l_P)^2}{2} - \frac{P_Y \cdot l_P(l - l_P)}{2} \rightarrow v' = \frac{P_Y(2 \cdot z \cdot l_P - l \cdot l_P)}{2 \cdot E \cdot I}$$

$$E \cdot I \cdot v = \frac{P_Y \cdot z^3}{6} - \frac{P_Y(z - l_P)^3}{6} - \frac{P_Y \cdot l_P(l - l_P) \cdot z}{2} \rightarrow v = \frac{P_Y \cdot l_P(l_P^2 + 3 \cdot z(z - l))}{6 \cdot E \cdot I}$$

Максимальный прогиб балки в середине пролета

Для нахождения максимального прогиба подставим $l/2$ в последнее выражение:

$$v = \frac{P_Y \cdot l_P \left(l_p^2 + 3 \cdot \frac{l}{2} \left(\frac{l}{2} - l \right) \right)}{6 \cdot E \cdot I} = \frac{P_Y \cdot l_P}{6 \cdot E \cdot I} \left(l_p^2 - \frac{3l^2}{4} \right) = -\frac{P_Y \cdot l_P}{24 \cdot E \cdot I} (3l^2 - 4l_p^2),$$

знак «минус» указывает направление изгиба балки в принятой системе координат и соответствует направлению внешних сил

Литература:

- СП 63.13330.2018 Бетонные и железобетонные конструкции
- СП 20.13330.2016 Нагрузки и воздействия
- Кумпяк О. Г., Самсонов В. С., Галяутдинов З. Р., Пахмурин О. Р. Железобетонные и каменные конструкции. – М.: Издательство АСВ, 2014. – 672 с.
- Уманский А.А. и др. Справочник проектировщика. Расчетно-теоретический. – М.: Государственное издательство литературы по строительству, архитектуре и строительным материалам, 1960. – 1040 с.
- Павлов П.А., Паршин Л.К., Мельников Б.Е., Шерстнев В.А. Сопротивление материалов : Учебное пособие. 2-е изд., испр. и доп. – СПб.: Издательство «Лань», 2007. – 560 с.

ИСА | 08.03.01 | ПГС | 6-й семестр

Железобетонные и каменные конструкции

Практическое занятие №7



НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ

**СТРОИТЕЛЬНЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ**

www: mgsu.ru/universityabout/Struktura/Kafedri/ZhBK/

e-mail: g bk@mgsu.ru; PekinDA@mgsu.ru

тел.: +7 495 287 49 14 доб. 3036, 3084

Пекин Дмитрий Анатольевич, доцент, к.т.н.