

**ИСА | 08.03.01 | ПГС | 6-й семестр**

# **Железобетонные и каменные конструкции**

## **Практическое занятие №1**



НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ

**СТРОИТЕЛЬНЫЙ  
УНИВЕРСИТЕТ**

www: [mgsu.ru/universityabout/Struktura/Kafedri/ZhBK/](http://mgsu.ru/universityabout/Struktura/Kafedri/ZhBK/)

e-mail: [gbk@mgsu.ru](mailto:gbk@mgsu.ru); [PekinDA@mgsu.ru](mailto:PekinDA@mgsu.ru)

тел.: +7 495 287 49 14 доб. 3036, 3084

Пекин Дмитрий Анатольевич, доцент, к.т.н.

# 6-й семестр – 14 практических занятий:

- Бетонные и железобетонные конструкции: характеристики материалов, особенности работы, методы и примеры расчета
- Одноэтажные производственные здания из серийных сборных железобетонных конструкций
- Тонкостенные пространственные покрытия зданий на примере цилиндрической оболочки и сферического купола
- Железобетонные конструкции инженерных сооружений на примере подпорной стенки и прямоугольного резервуара
- Каменные и армокаменные конструкции на примере несущих колонн и стен

# 6-й семестр – расчетно-графическая работа (РГР)

Проектирование монолитного железобетонного ребристого перекрытия многоэтажного каркасного здания (по вариантам):

- Скомпоновать монолитное железобетонное ребристое перекрытие многоэтажного здания – выбор расположения главных и второстепенных балок, определение пролетов и шагов балок, геометрии их сечений и толщины плиты перекрытия
- Сбор нагрузок, статический расчет и конструирование многопролетной плиты и второстепенной балки перекрытия
- Разработка чертежей данных конструкций в графической системе AutoCAD

Методические указания и справочные материалы по ссылке:

<https://mgsu.ru/universityabout/Struktura/Kafedri/ZhBK/mmaterials/Monolitnye%20perekrytiya.pdf>

# Практическое занятие №1 – краткий обзор:

- Физико-механические характеристики бетона и арматуры
- Геометрические характеристики элементов и сечений
- Устойчивость равновесия центрально-сжатого стержня
- Критическая сила
- Коэффициенты расчетной длины
- Коэффициент динамичности

# Физические характеристики бетона:

- Марка бетона по средней плотности – от D500 до D2500 и выше
- Марка по водонепроницаемости – от W2 до W20
- Марка по морозостойкости – от F25 до F500
- Марка по самонапряжению – от  $S_p 0,6$  до  $S_p 4$  (напряжения в МПа)
- Жаростойкость (прочность при температурах  $\sim 200^\circ\text{C}$ )
- Огнестойкость (прочность при огневом воздействии,  $\sim 1100^\circ\text{C}$ )
- Коррозионная стойкость
- Зависят от вида вяжущего (цементные, силикатные, ...)
- Зависят от вида заполнителя (плотные, пористые, ...)
- Зависят от зернового состава (крупнозернистые, ...)

# Прочностные характеристики бетона:

- Прочность на осевое сжатие или кубиковая прочность  $R$  (на основе испытаний кубов со стороной 100, 150, 200, 300 мм)
- Призменная прочность  $R_b$  (призма –  $a \times a \times h$  мм, где  $h=4a$ )
- Прочность на осевое растяжение  $R_{bt} = 0,05 \dots 0,1 R_b \cong 0,234 R^{2/3}$  (на основе испытаний «гантелей» на растяжение, цилиндров и кубов на раскалывание, балок изгибу)
- Прочность при срезе и скалывании  $R_{sh} \cong 2 \dots 3 R_{bt}$
- Прочность при длительном действии нагрузки  $R_{bl} \cong 0,9 R_b$
- Прочность при многократно повторных нагрузках  $R_r \cong 0,5 R_b$

Классы тяжелого бетона по прочности на сжатие и растяжение соответственно – В3,5...В100 и В<sub>t</sub>0,8...В<sub>t</sub>4,8

# Деформационные характеристики бетона:

- Предельная относительная деформация сжатия  $\varepsilon_{b0} = 0,0015 \dots 0,003$
- Предельная относительная деформация растяжения  $\varepsilon_{bt0} = 0,0001$
- Начальный модуль упругости  $E_b = 9500 \dots 43000$  МПа
- Коэффициент поперечной деформации (Пуассона)  $\nu_b \cong 0,167 \cong 0,2$
- Модуль сдвига  $G = \frac{E_b}{2(1+\nu_b)} \cong 0,4E_b$
- Коэффициент (характеристика) ползучести  $\varphi_{b,cr} = 1 \dots 5,6$
- Модуль деформаций при длительном нагружении  $E_{b,\tau} = \frac{E_b}{1+\varphi_{b,cr}}$
- Коэффициент линейной температурной деформации  $\alpha_{bt} = 1,0 \cdot 10^{-5} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$
- Относительная деформации усадки  $\varepsilon_{sl} = 0,00015 \dots 0,00035$

# Механические характеристики арматуры:

- Сопротивление растяжению  $R_s = 210...1670$  МПа
- Сопротивление сжатию  $R_{sc} = 210...500(400)$  МПа
- Сопротивление срезу  $R_{sw} = 170...300$  МПа (А240, А400, А500, В500)
- Модуль упругости  $E_s = 195\ 000$  (для К...) и  $200\ 000$  (для А...) МПа
- Относительная деформация  $\varepsilon_{s0} = \frac{R_s}{E_s}$  или  $\varepsilon_{s0} = \frac{R_s}{E_s} + 0,002$  при физическом или условном пределе текучести соответственно
- Предельная относительная деформация  $\varepsilon_{s2} = 0,025$
- Коэффициент линейного расширения  $\alpha_s = 1,2 \cdot 10^{-5} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$

Классы арматуры по прочности на растяжение – А240, А400, А500, А600, А800, А1000, В500, В<sub>p</sub>500, В<sub>p</sub>1200...В<sub>p</sub>1600, К1400...К1900

# Цель армирования

- Прочность бетона на сжатие  $R_b$  и растяжение  $R_{bt} = 0,05...0,1R_b$  существенно отличается – более 10 раз
- Установка арматуры в растянутой зоне бетона существенно повышает разрушающую нагрузку
- Армирование сжатой зоны бетона также заметно увеличивает сопротивление сжимающей нагрузке
- Основная цель армирования – повысить несущую способность бетонных конструкций с учетом эффективной работы бетона на сжатие и минимального расхода арматурной стали
- Главное условие для достижения цели – обеспечение совместной работы бетона и арматуры

# Задачи армирования

- Изменить характер работы конструкции
- Повысить несущую способность по различным критериям
- Минимизировать влияние отрицательных качеств бетона
- Гарантировать надежность и работоспособность конструкций
- Обеспечить требования по нормальной эксплуатации
- Увеличить срок службы или долговечность сооружений

При этом исключить возможность негативного влияния армирования (выпучивание, коррозия арматуры, ...) на работу конструкции, использовать минимальное количество арматуры и обеспечить требуемую огнестойкость

# Совместная работа арматуры с бетоном

- Достигается за счет наличия профиля (ребер) на поверхности стержней или устройства анкерных элементов на концах гладкой арматуры (отгибы, шайбы, ...) и размещения в теле бетона на достаточном расстоянии от граней элемента
- В силу совместной работы  $\varepsilon_b = \varepsilon_s = \frac{\sigma_b}{E_b} = \frac{\sigma_s}{E_s}$  и разных модулей упругости у бетона  $E_b = 30000$  МПа (В25) и арматуры  $E_s = 200\,000$  МПа (А500) действующие в них нормальные напряжения  $\sigma_s = \alpha\sigma_b$  отличаются на коэффициент приведения  $\alpha = \frac{E_s}{E_b} = 6,7$  (который может увеличиваться в отдельных нормальных сечениях элементов до  $\sim 2$ -х раз по мере нагружения и роста пластических деформаций в бетоне)

# Ограничения по арматуре

- После достижения растягивающих напряжений в бетоне класса В25 значений  $\sigma_{bt} = R_{bt} = 1,05$  МПа в нем образуется трещина, при этом в арматуре класса А500 растягивающие напряжения могут составлять всего лишь  $\sigma_s = \alpha\sigma_{bt} = 7 \ll R_s = 435$  МПа, в этой связи, применение высокопрочной арматуры без предварительного напряжения не рекомендуется в связи с неэффективностью
- Материал арматуры, расположенной в теле бетона, не должен обладать существенно большим коэффициентом линейного расширения, поскольку при нагреве может возникнуть отслоение защитного слоя и достаточно скорое разрушение
- И главное – исключение возможности выпучивания арматуры в сжатой зоне бетона посредством соблюдения требований норм

# Ограничение высоты сжатой зоны бетона

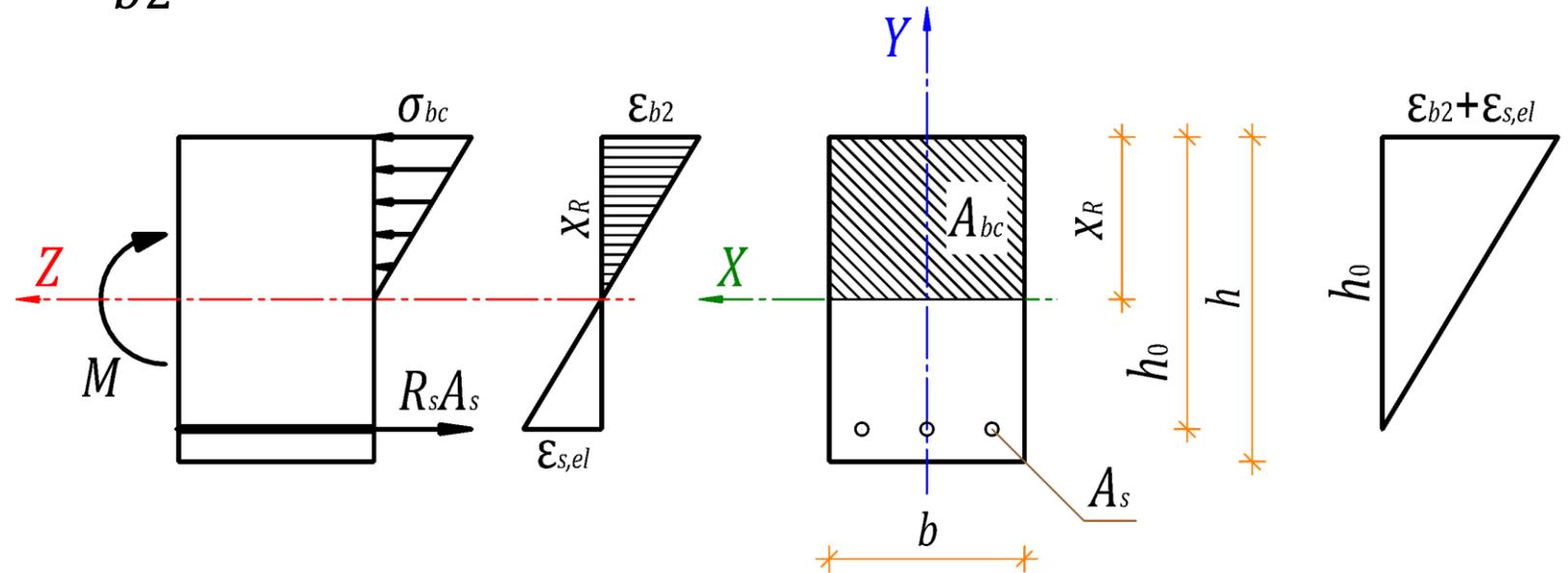
Высоту сжатой зоны бетона необходимо ограничить из соображений его предельной сжимаемости:

$$\xi_R = \frac{x_R}{h_0} = \frac{0,8}{1 + \frac{\varepsilon_{s,el}}{\varepsilon_{b2}}} = \frac{0,8\varepsilon_{b2}}{\varepsilon_{b2} + \varepsilon_{s,el}} \leftarrow \frac{x_R}{0,8\varepsilon_{b2}} = \frac{h_0}{\varepsilon_{b2} + \varepsilon_{s,el}}$$

где  $\xi_R$  – граничная относительная высота сжатой зоны бетона;

$\varepsilon_{s,el} = \frac{R_s}{E_s}$  – относит. деформация стали

$\varepsilon_{b2} = 0,0035$  – относит. деформация бетона при непродолжительном действии нагрузки



# Геометрические характеристики сечений:

- Габаритные размеры –  $b, h, b'_f$  и  $h'_f$
- Площади сечения, сжатой и растянутых зон бетона –  $A, A_{bc}$  и  $A_{bt}$
- Площади растянутой и сжатой арматуры –  $A_s$  и  $A'_s$
- Расстояния от центра тяжести до граней сечения по оси  $Y$  –  $y_c$  и  $y_t$
- Статические моменты относительно осей  $X$  и  $Y$  –  $S_x$  и  $S_y$
- Моменты инерции относительно осей  $X$  и  $Y$  –  $I_x$  и  $I_y$
- Моменты сопротивления крайних волокон относительно осей  $X$  и  $Y$  –  $W_x$  и  $W_y$
- Радиусы ядра сечения относительно осей  $X$  и  $Y$  –  $\rho_x$  и  $\rho_y$
- Радиусы инерции относительно осей  $X$  и  $Y$  –  $i_x$  и  $i_y$

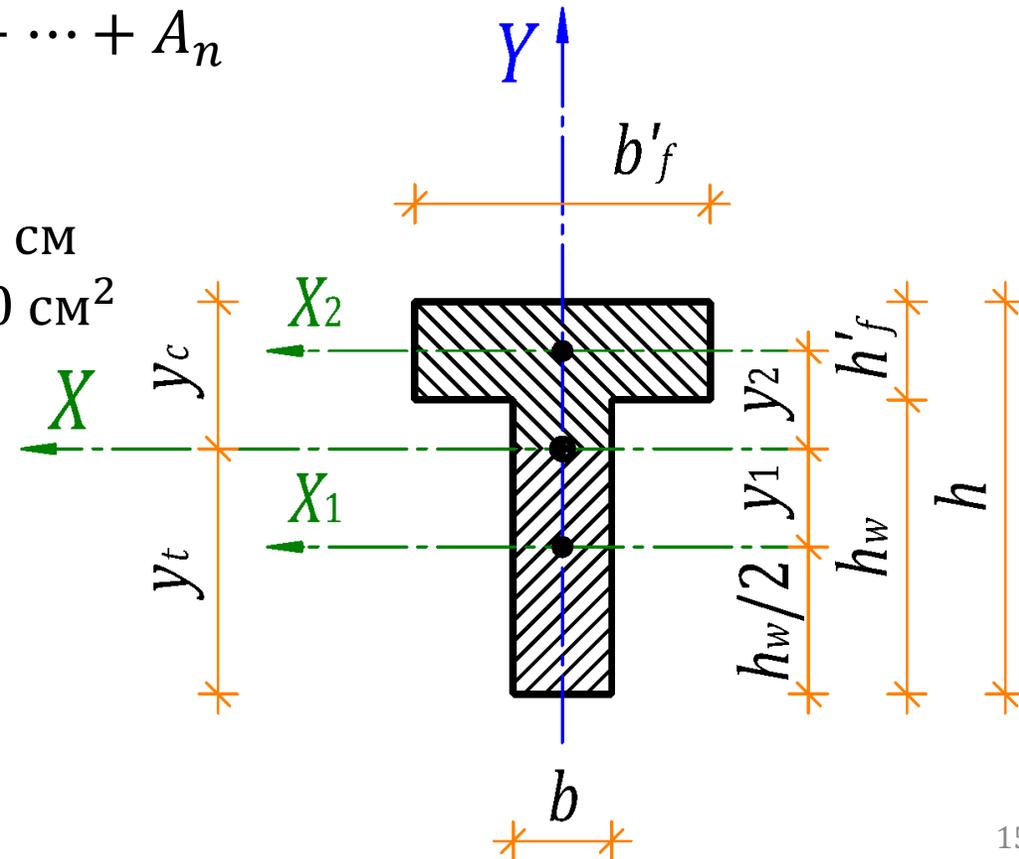
# Площадь составного поперечного сечения

Простой геометрической формы определяется путем суммирования площадей отдельных фигур:

$$A = \sum_{i=1}^n A_i = A_1 + A_2 + \dots + A_n$$

**Пример 1.** Дано: Тавр  $b = h'_f = 10$  см,  $h_w = b'_f = 30$  см

$$A = A_1 + A_2 = bh_w + b'_fh'_f = 10 \cdot 30 + 30 \cdot 10 = 600 \text{ см}^2$$



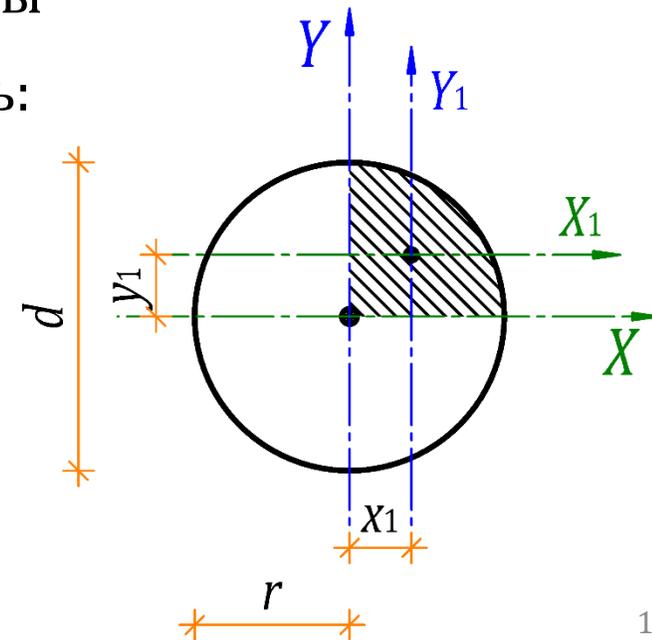
# Площадь поперечного сечения

Криволинейной трапеции в декартовых и полярных координатах определяется по формулам:

$$A = \int_a^b f(x)dx \quad \text{и} \quad A = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} [r(\varphi)]^2 d\varphi$$

**Пример 2.** Дано: Круг радиусом  $r = 5$  см, тогда с учетом формулы  $x^2 + y^2 = r^2$  получим  $f(x) = y = \sqrt{r^2 - x^2}$  и определим площадь:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}A &= \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{r^2 - x^2} \Big|_0^r + \frac{r^2}{2} \arcsin \frac{x}{r} \Big|_0^r = \\ &= \left( \frac{r}{2} \sqrt{r^2 - r^2} - \frac{0}{2} \sqrt{r^2 - 0^2} \right) + \frac{r^2}{2} \left( \arcsin \frac{r}{r} - \arcsin \frac{0}{r} \right) = \\ &= 0 + \frac{r^2}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi \cdot r^2}{4} \rightarrow A = \pi \cdot r^2 = 3,14 \cdot 5^2 = 78,5 \text{ см}^2 \end{aligned}$$



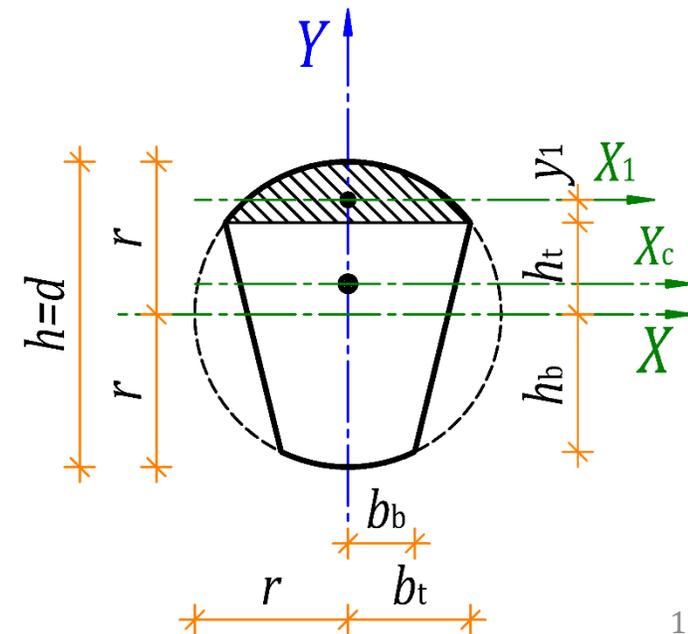
# Площадь поперечного сечения

Криволинейной трапеции в декартовых координатах относительно оси  $Y$  определяется по формуле:

$$A = \int_c^d f(y) dy$$

**Пример 3.** Дано: Круговой сегмент радиусом  $r = 5$  см и  $h_t = 3$  см, тогда с учетом формулы  $x^2 + y^2 = r^2$  получим  $f(y) = x = \sqrt{r^2 - y^2}$  площадь:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}A &= \int_{h_t}^r \sqrt{r^2 - y^2} dy = \frac{y}{2} \sqrt{r^2 - y^2} \Big|_{h_t}^r + \frac{r^2}{2} \arcsin \frac{y}{r} \Big|_{h_t}^r = \\ &= \left( \frac{r}{2} \sqrt{r^2 - r^2} - \frac{h_t}{2} \sqrt{r^2 - h_t^2} \right) + \frac{r^2}{2} \left( \arcsin \frac{r}{r} - \arcsin \frac{h_t}{r} \right) = \\ &= \frac{r^2}{2} \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{h_t}{2} \sqrt{r^2 - h_t^2} - \frac{r^2}{2} \arcsin \frac{h_t}{r} \rightarrow \\ \rightarrow A &= \frac{\pi r^2}{2} - h_t \sqrt{r^2 - h_t^2} - r^2 \cdot \arcsin \frac{h_t}{r} = 11,2 \text{ см}^2 \end{aligned}$$



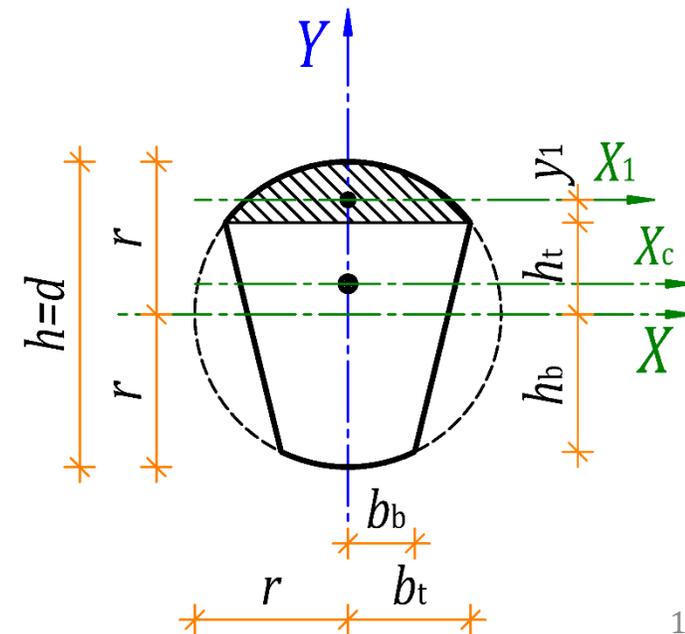
# Площадь поперечного сечения

Сложной геометрической формы в декартовых координатах определяется по формуле:

$$A = \iint_A f(x, y) dx dy = \iint_A f(x, y) dA, \quad \text{где } f(x, y) = 1$$

**Пример 4.** Дано: Круговой сегмент радиусом  $r = 5$ ,  $h_t = 3$  и  $b_t = 4$  см, тогда площадь:

$$\begin{aligned} A &= \int_{-b_t}^{+b_t} dx \int_{h_t}^{\sqrt{r^2 - x^2}} dy = \int_{-b_t}^{+b_t} (\sqrt{r^2 - x^2} - h_t) dx = \\ &= \int_{-b_t}^{+b_t} \sqrt{r^2 - x^2} dx - h_t \int_{-b_t}^{+b_t} dx = \\ &= \frac{x}{2} \sqrt{r^2 - x^2} \Big|_{-b_t}^{+b_t} + \frac{r^2}{2} \arcsin \frac{x}{r} \Big|_{-b_t}^{+b_t} - h_t \cdot x \Big|_{-b_t}^{+b_t} = \\ &= 2 \cdot \frac{b_t}{2} \sqrt{r^2 - b_t^2} + \frac{r^2}{2} \left( \arcsin \frac{b_t}{r} - \arcsin \frac{-b_t}{r} \right) - 2 \cdot h_t b_t = 11,2 \text{ см}^2 \end{aligned}$$



# Статические моменты поперечного сечения

Простой геометрической формы из фигур с площадями  $A_1, \dots, A_i$  относительно осей  $X$  и  $Y$  определяется путем суммирования произведений этих площадей на расстояния до их центров тяжести (с учетом разных знаков относительно осей):

$$S_{xi} = \sum_{i=1}^n A_i y_i = A_1 y_1 + \dots + A_i y_i \quad \text{и} \quad S_{yi} = \sum_{i=1}^n A_i x_i = A_1 x_1 + \dots + A_i x_i$$

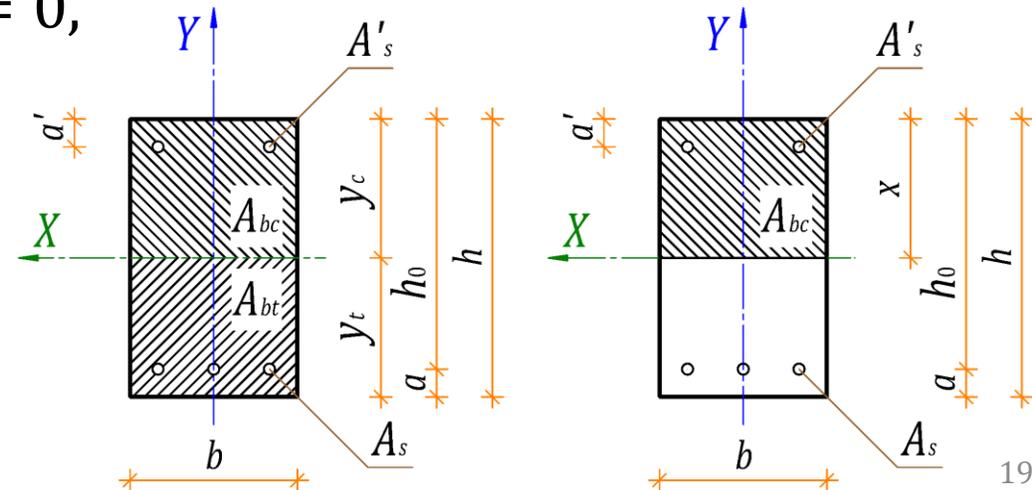
Статические моменты всего сечения  $A$  относительно **центральных** осей  $X$  и  $Y$ :

$$S_{x0} = 0 \quad \text{и} \quad S_{y0} = 0,$$

где  $A_i$  – площадь произвольной части сечения ( $A_{bc}, A_{bt}, A_s, A'_s$ );

$A = A_{bc} + A_{bt} = bh$  – площадь всего сечения;

$x_i$  и  $y_i$  – расстояния от центра тяжести площади  $A_i$  до осей  $X$  и  $Y$  соответственно



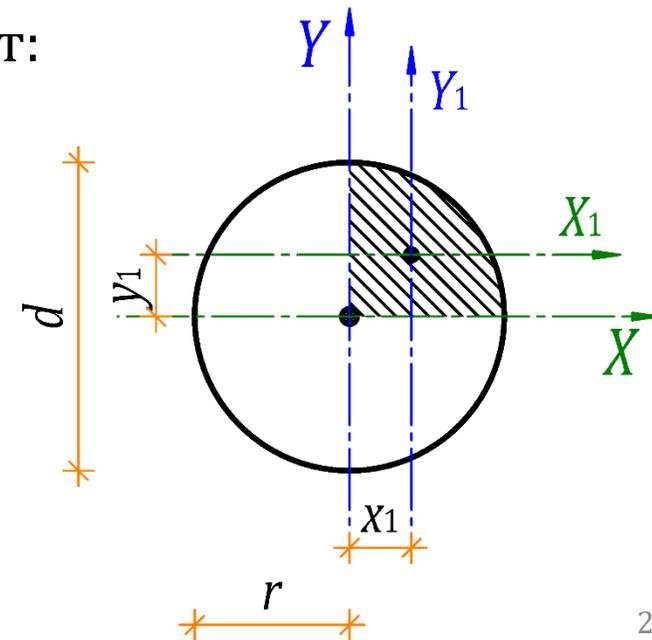
# Статические моменты поперечного сечения

Криволинейной трапеции в декартовых координатах определяются по формулам (с учетом разных знаков относительно осей):

$$S_x = \frac{1}{2} \int_a^b y \cdot |y| dx \quad \text{и} \quad S_y = \int_a^b x \cdot |y| dx = \frac{1}{2} \int_\alpha^\beta x \cdot |x| dy$$

**Пример 5.** Дано: Четверть круга радиусом  $r = 5$  см, тогда с учетом формулы  $x^2 + y^2 = r^2$  получим  $f(x) = y = \sqrt{r^2 - x^2}$  и статический момент:

$$\begin{aligned} S_x &= \frac{1}{2} \int_0^r (r^2 - x^2) dx = \frac{1}{2} \left( r^2 \frac{x}{1} \Big|_0^r - \frac{x^3}{3} \Big|_0^r \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left( r^3 - 0 - \frac{r^3}{3} + 0 \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2r^3}{3} = \frac{r^3}{3} \rightarrow S_x = \frac{r^3}{3} = \frac{5^3}{3} = 41,7 \text{ см}^3 \end{aligned}$$



# Центр тяжести поперечного сечения

Простой геометрической формы определяется с помощью Теоремы о моменте равнодействующем:

$$y_1 = \frac{S_{x1}}{A},$$

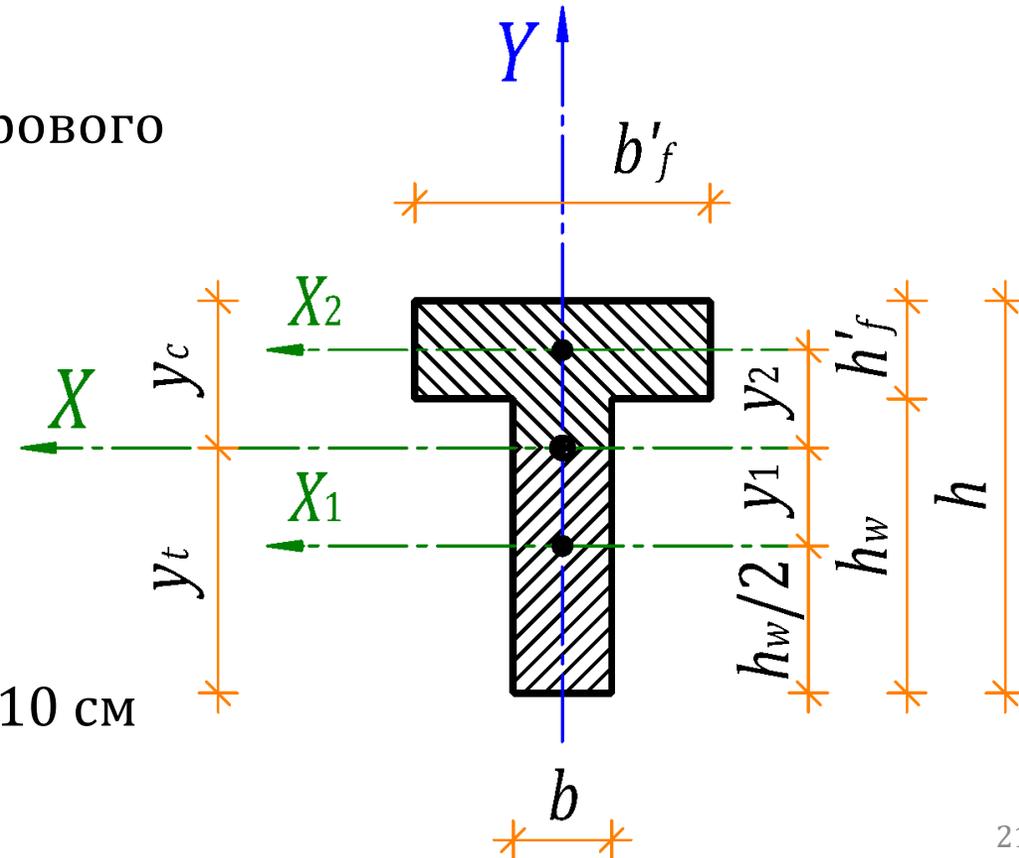
где  $S_{x1} = b'_f h'_f \left( \frac{h'_f}{2} + \frac{h_w}{2} \right)$  – статический момент таврового сечения относительно вспомогательной оси  $X_1$ ;

$A = b h_w + b'_f h'_f$  – площадь таврового сечения;

$y_1$  – расстояние от вспомогательной оси  $X_1$  до центра тяжести таврового сечения

**Пример 6.** Дано:  $b = h'_f = 10$  см;  $h_w = b'_f = 30$  см

$$y_1 = \frac{S_{x1}}{A} = \frac{b'_f h'_f \left( \frac{h'_f}{2} + \frac{h_w}{2} \right)}{b h_w + b'_f h'_f} = \frac{10 \cdot 30 \cdot (5 + 15)}{10 \cdot 30 \cdot 2} = 10 \text{ см}$$



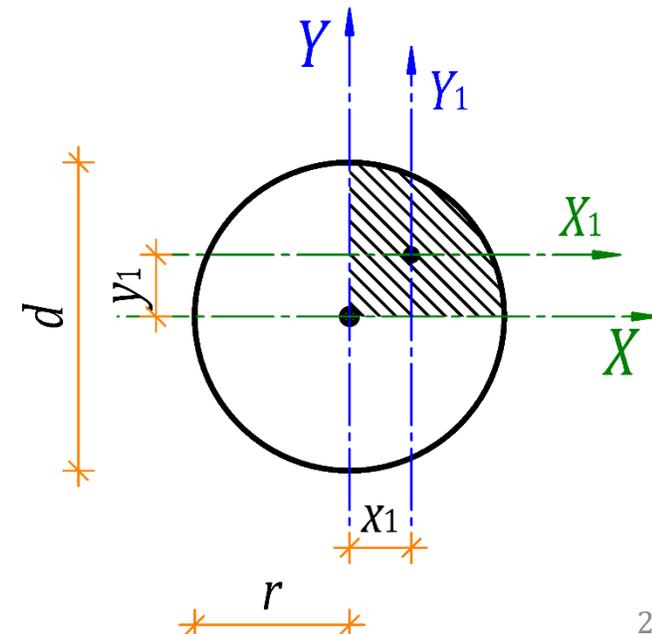
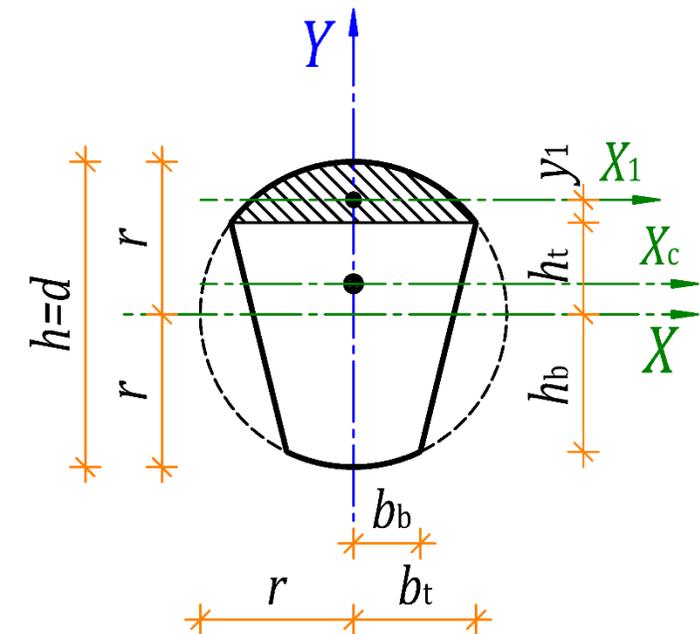
# Центры тяжести поперечного сечения:

- Криволинейной трапеции определяется по формулам:

$$\bar{y} = \frac{S_x}{A} = \frac{\frac{1}{2} \int_a^b y \cdot |y| dx}{A} \quad \text{и} \quad \bar{x} = \frac{S_y}{A} = \frac{\frac{1}{2} \int_\alpha^\beta x \cdot |x| dy}{A}$$

- Сложной геометрической формы по формулам:

$$\bar{y} = \frac{S_x}{A} = \frac{\iint_A y dA}{A} \quad \text{и} \quad \bar{x} = \frac{S_y}{A} = \frac{\iint_A x dA}{A}$$



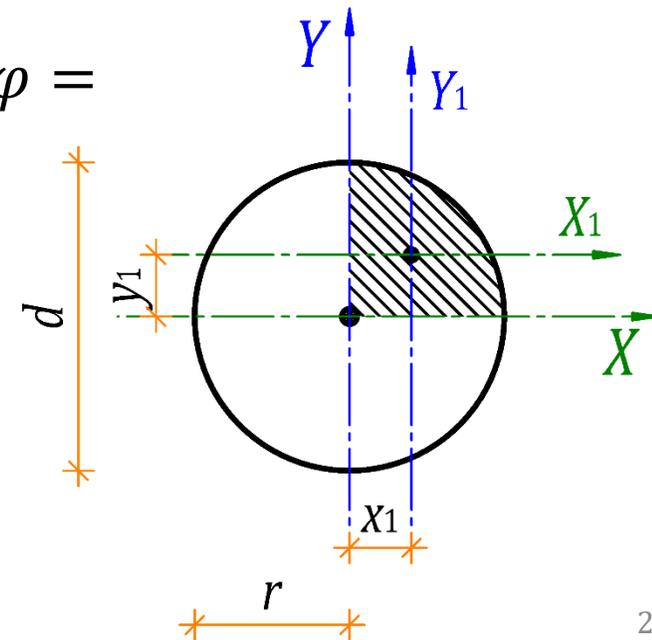
# Полярный момент инерции:

- Поперечного сечения сложной геометрической формы определяется по формуле:

$$I_p = \iint_A r^2 dA$$

- Полярный момент инерции круга определяется по формуле:

$$\begin{aligned} I_p &= \iint_A r^2 dA = \iint_A r^2 \cdot dr(r \cdot d\varphi) = \int_0^{2\pi} \left( \int_0^R r^3 dr \right) d\varphi = \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{R^4}{4} d\varphi = \frac{R^4}{4} \varphi \Big|_0^{2\pi} = \frac{2\pi \cdot R^4}{4} = \frac{\pi R^4}{2} \end{aligned}$$



# Моменты инерции поперечного сечения:

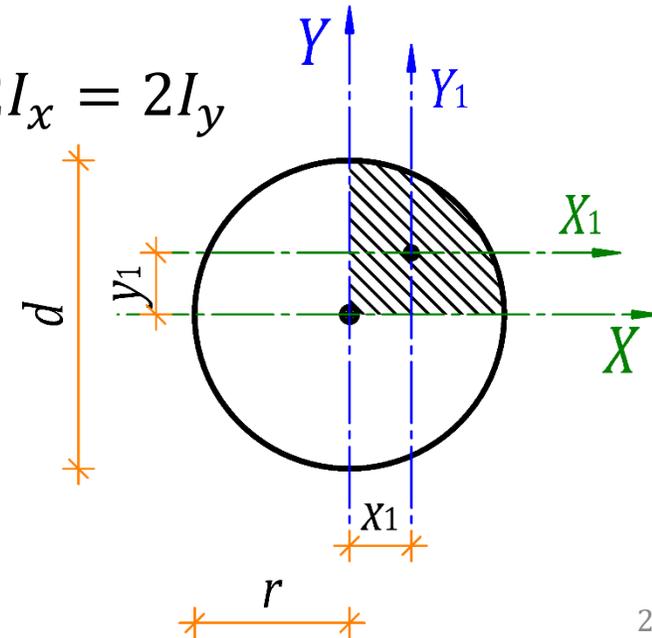
- Сложной геометрической формы в декартовых координатах определяются по формулам:

$$I_x = \iint_A y^2 dA \quad \text{и} \quad I_y = \iint_A x^2 dA$$

- Момент инерции круга в декартовых координатах определяется на основе полярного момента инерции по формуле:

$$I_p = \iint_A r^2 dA = \iint_A (x^2 + y^2) dA = \iint_A y^2 dA + \iint_A x^2 dA = 2I_x = 2I_y$$

$$I_x = I_y = \frac{I_p}{2} = \frac{\pi R^4}{2 \cdot 2} = \frac{\pi R^4}{4}$$

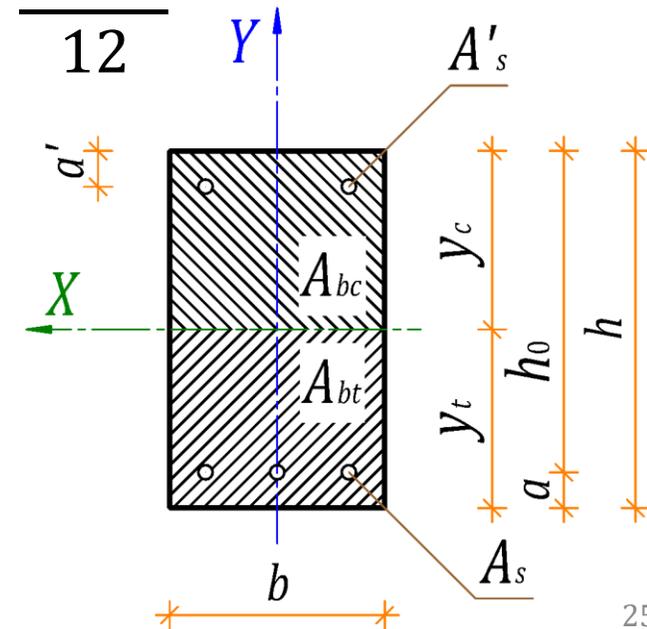


# Моменты инерции прямоугольного сечения

В декартовых координатах определяются по аналогичным формулам:

$$I_x = \iint_A y^2 dA = \int_{-b/2}^{+b/2} \left( \int_{-h/2}^{+h/2} y^2 dy \right) dx = \frac{h^3}{12} \int_{-b/2}^{+b/2} dx = \frac{b \cdot h^3}{12}$$

$$I_y = \iint_A x^2 dA = \int_{-h/2}^{+h/2} \left( \int_{-b/2}^{+b/2} x^2 dx \right) dy = \frac{b^3}{12} \int_{-h/2}^{+h/2} dy = \frac{h \cdot b^3}{12}$$



# Момент инерции поперечного сечения

Относительно центральной оси  $X$  равен сумме моментов инерции относительно собственных осей  $I_{x1}$  и  $I_{x2}$  и произведений статических моментов (или площадей)  $S_{x1}(A_1)$  и  $S_{x2}(A_2)$  на расстояния (или квадраты расстояний)  $y_1(y_1^2)$  и  $y_2(y_2^2)$ :

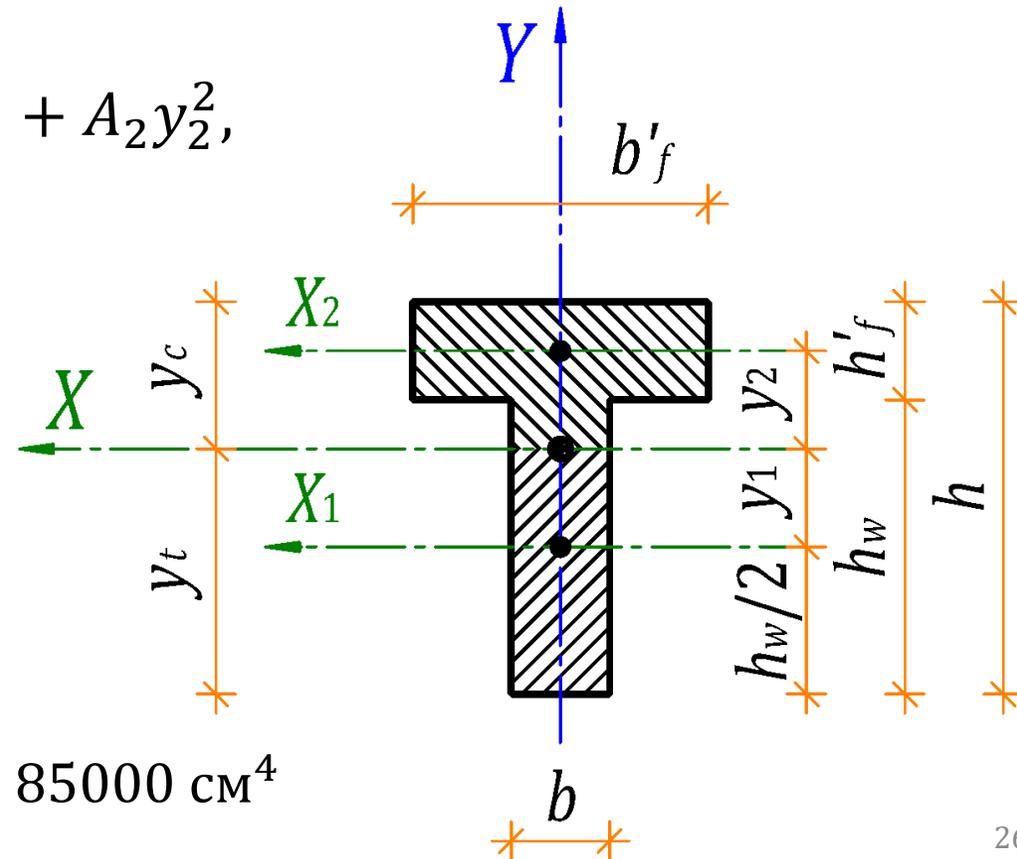
$$I_x = I_{x1} + S_{x1}y_1 + I_{x2} + S_{x2}y_2 = I_{x1} + A_1y_1^2 + I_{x2} + A_2y_2^2,$$

где  $I_{x1} = \frac{bh_w^3}{12}$  и  $I_{x2} = \frac{b'_fh_f{}^3}{12}$  – моменты инерции относительно собственных осей  $X_1$  и  $X_2$

**Пример 7.** Дано:  $b = h'_f = 10$  см;  $h_w = b'_f = 30$  см

$$I_x = \frac{bh_w^3}{12} + bh_wy_1^2 + \frac{b'_fh_f{}^3}{12} + b'_fh_fy_2^2 =$$

$$= \frac{10 \cdot 30^3}{12} + 10 \cdot 30 \cdot 10^2 + \frac{30 \cdot 10^3}{12} + 30 \cdot 10 \cdot 10^2 = 85000 \text{ см}^4$$



# Моменты сопротивления крайних волокон

Относительно центральной оси  $X$  равны отношению момента инерции  $I_x$  к расстояниям до центра тяжести сечения  $y_c$  и  $y_t$ :

$$W_{x,c} = \frac{I_x}{y_c} \quad \text{и} \quad W_{x,t} = \frac{I_x}{y_t},$$

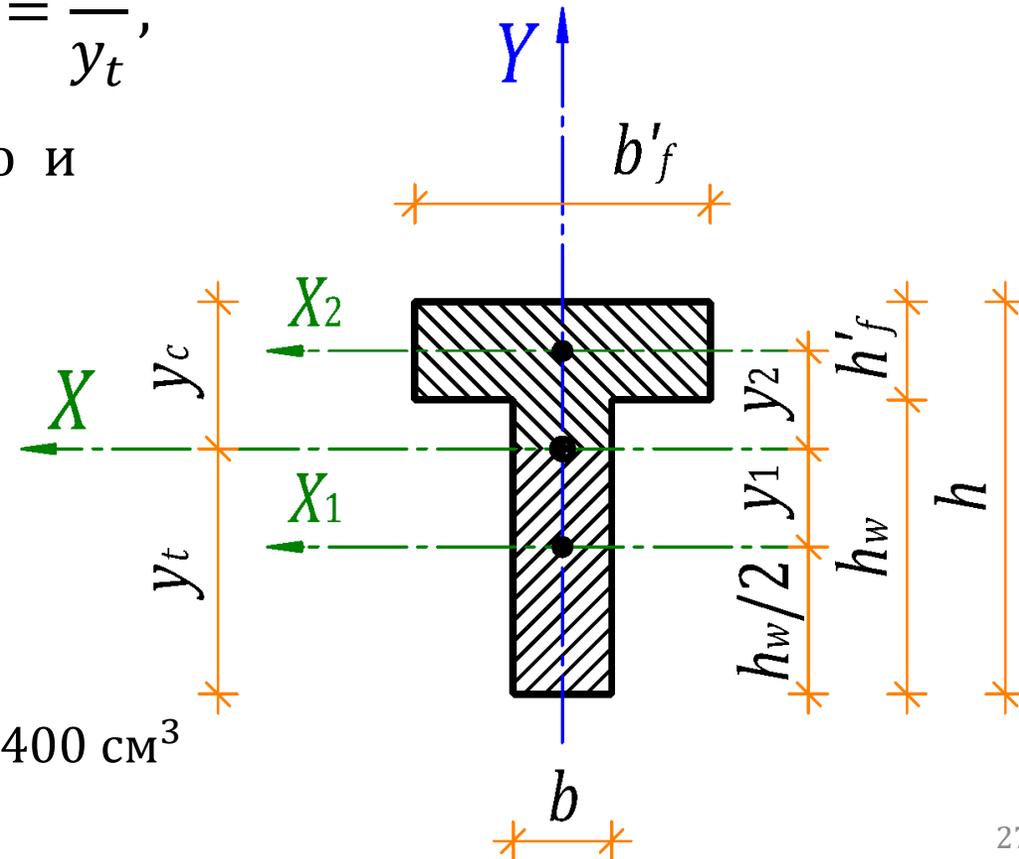
где  $W_{x,c}$  и  $W_{x,t}$  – моменты сопротивления верхнего и нижнего волокон сечения, соответственно;

$$W_x = \frac{I_x}{h/2} = \frac{bh^3/12}{h/2} = \frac{bh^2}{6} \text{ – прямоугольного сечения;}$$

$y_c$  и  $y_t$  – расстояние от центра тяжести сечения до верхней и нижней грани соответственно

**Пример 8.** Дано:  $b = h'_f = 10$  см;  $h_w = b'_f = 30$  см

$$W_{x,c} = \frac{I_x}{y_c} = \frac{85000}{15} = 5666,7 \text{ см}^3 \quad \text{и} \quad W_{x,t} = \frac{I_x}{y_t} = \frac{85000}{25} = 3400 \text{ см}^3$$



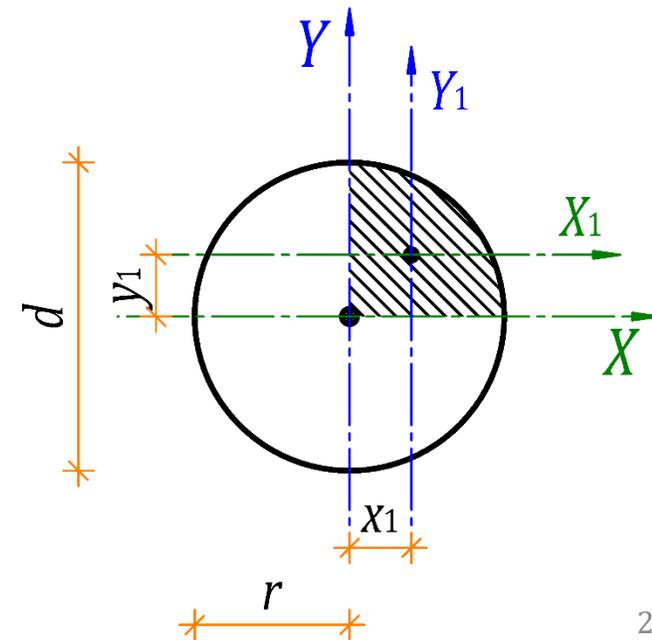
# Полярный момент сопротивления

Полярный момент инерции круга определяется по формуле:

$$\begin{aligned} I_p &= \iint_A r^2 dA = \iint_A r^2 \cdot dr(r \cdot d\varphi) = \int_0^{2\pi} \left( \int_0^R r^3 dr \right) d\varphi = \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{R^4}{4} d\varphi = \frac{R^4}{4} \varphi \Big|_0^{2\pi} = \frac{2\pi \cdot R^4}{4} = \frac{\pi R^4}{2} \end{aligned}$$

Полярный момент сопротивления круга:

$$W_p = \frac{I_p}{R} = \frac{\pi R^4}{2R} = \frac{\pi R^3}{2}$$



# Радиусы инерции:

От центра тяжести вдоль осей  $X$  и  $Y$  равны квадратному корню из отношения моментов инерции  $I_x$  и  $I_y$  к площади сечения  $A$ :

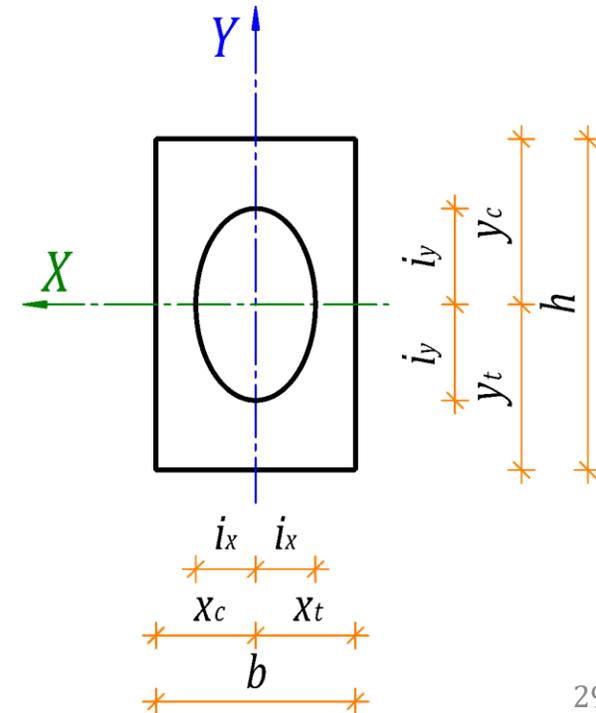
$$i_y = \sqrt{\frac{I_x}{A}} \quad \text{и} \quad i_x = \sqrt{\frac{I_y}{A}},$$

где  $I_x$  и  $I_y$  – моменты инерции сечения относительно осей  $X$  и  $Y$  соответственно;

$A$  – площадь сечения

**Пример 9.** Дано:  $b = 30$  см;  $h = 50$  см

$$i_y = \sqrt{\frac{I_x}{A}} = \sqrt{\frac{312500}{1500}} = 14,4 \text{ см} \quad \text{и} \quad i_x = \sqrt{\frac{I_y}{A}} = \sqrt{\frac{112500}{1500}} = 8,7 \text{ см}$$



# Полярный радиус инерции

От центра тяжести также равен квадратному корню из отношения полярного момента инерции  $I_p$  к площади сечения  $A$ :

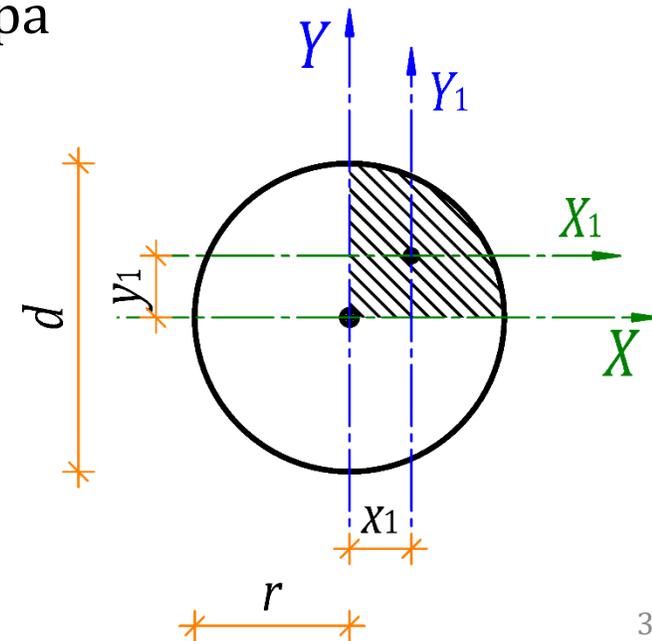
$$i_p = \sqrt{\frac{I_p}{A}},$$

где  $I_p$  – полярный момент инерции сечения относительно центра тяжести сечения;

$A$  – площадь сечения

**Пример 10.** Дано: Круг радиусом  $r = 5$  см,  $A = 78,5$  см<sup>2</sup>

$$I_p = \frac{\pi R^4}{2} = \frac{3,14 \cdot 5^4}{2} = 990,6 \text{ см}^4 \rightarrow i_p = \sqrt{\frac{I_p}{A}} = \sqrt{\frac{990,6}{78,5}} = 3,6 \text{ см}$$



# Ядровые расстояния (радиусы ядра сечения):

От центра тяжести вдоль осей  $X$  и  $Y$  равны отношению моментов сопротивления крайних волокон  $W_x$  и  $W_y$  к площади сечения  $A$ :

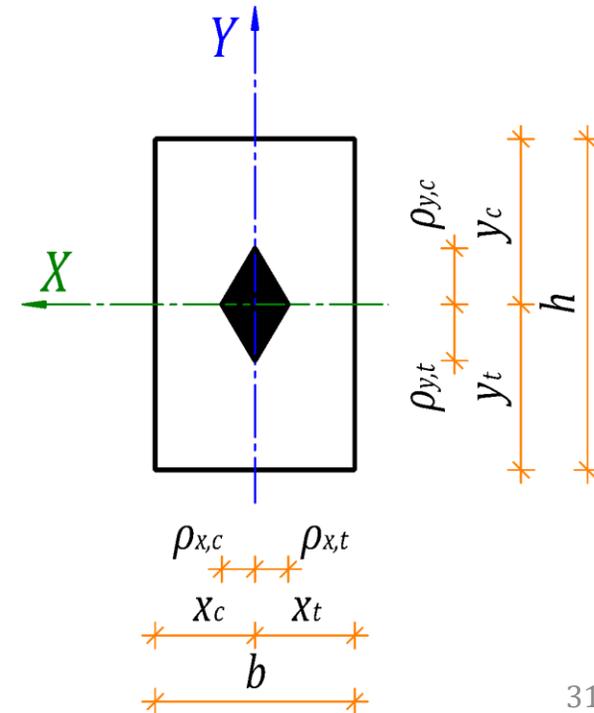
$$\rho_{y,c} = \frac{I_x}{Ay_t} = \frac{W_{x,t}}{A}, \rho_{y,t} = \frac{I_x}{Ay_c} = \frac{W_{x,c}}{A} \quad \text{и} \quad \rho_{x,c} = \frac{I_y}{Ax_t} = \frac{W_{y,t}}{A}, \rho_{x,t} = \frac{I_y}{Ax_c} = \frac{W_{y,c}}{A}$$

где  $W_{x,t}$  ( $W_{y,t}$ ) и  $W_{x,c}$  ( $W_{y,c}$ ) – моменты сопротивления крайних волокон сечения относительно оси  $X$  ( $Y$ );

$y_c$  ( $x_c$ ) и  $y_t$  ( $x_t$ ) – расстояние от центра тяжести сечения до верхней и нижней грани вдоль оси  $Y$  ( $X$ ) соответственно

**Пример 11.** Дано:  $b = 30$  см;  $h = 50$  см

$$\rho_y = \frac{W_x}{A} = \frac{12500}{1500} = 8,3 \text{ см} \quad \text{и} \quad \rho_x = \frac{W_y}{A} = \frac{7500}{1500} = 5 \text{ см}$$



# Гибкости стержневых элементов:

В направлении главных плоскостей инерции  $XZ$  и  $YZ$  вычисляются по формулам:

$$\lambda_y = \frac{l_{0y}}{i_x} = \frac{\mu_y \cdot l_y}{i_x} \quad \text{и} \quad \lambda_x = \frac{l_{0x}}{i_y} = \frac{\mu_x \cdot l_x}{i_y},$$

где  $i_x$  и  $i_y$  – радиусы инерции сечения относительно осей  $X$  и  $Y$ ;

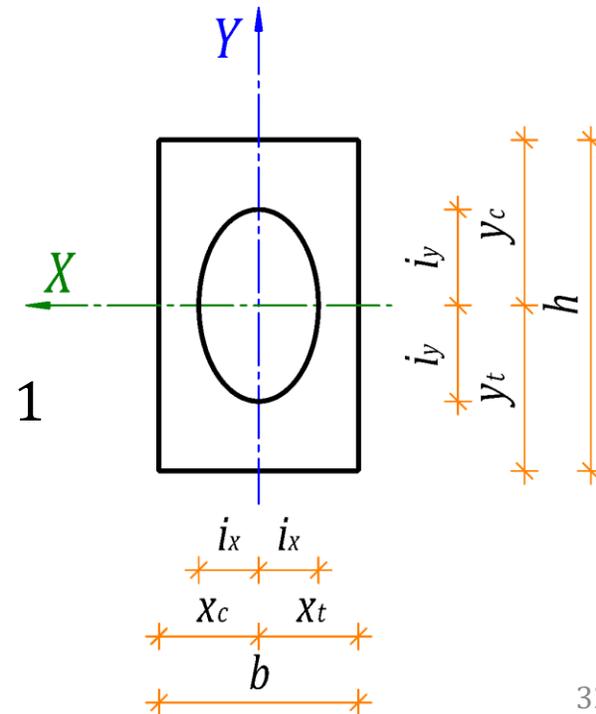
$l_{0x}$  и  $l_{0y}$  – расчетные длины стержня в плоскостях  $XZ$  и  $YZ$ ;

$\mu_x$  и  $\mu_y$  – коэффициенты расчетной длины в плоскостях  $XZ$  и  $YZ$ ;

$l_x$  и  $l_y$  – длины пролетов (расстояния между точками закрепления) стержня в плоскостях  $XZ$  и  $YZ$

**Пример 12.** Дано:  $b = 30$  см;  $h = 50$  см;  $l_x = l_y = 300$  см;  $\mu_x = \mu_y = 1$

$$\lambda_y = \frac{l_{0y}}{i_x} = \frac{1 \cdot 300}{14,4} = 20,8 \quad \text{и} \quad \lambda_x = \frac{l_{0x}}{i_y} = \frac{1 \cdot 300}{8,7} = 34,5$$



# Устойчивость равновесия стержня

Прямолинейной формы с шарнирным опиранием по концам, малыми прогибами (для использования дифференциального уравнения изогнутой оси балки) и при центральном сжатии впервые сформулирована Л. Эйлером:

$$K = \frac{1}{r} = \frac{v''}{\sqrt{(1 + v'^2)^3}} = \frac{M}{E \cdot I}, \text{ тогда при } v'^2 \rightarrow 0 \text{ получим: } E \cdot I \cdot v'' = M = -F \cdot v,$$

$$\text{с учетом обозначения } k^2 = \frac{F}{E \cdot I} \text{ получим: } v'' + k^2 \cdot v = 0,$$

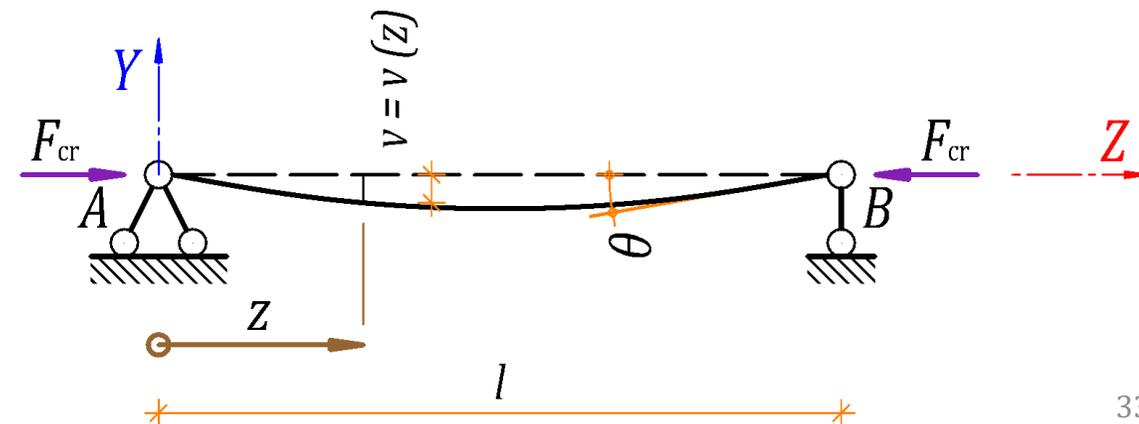
общее решение которого имеет вид:  $v = C_1 \sin(k \cdot z) + C_2 \cos(k \cdot z)$

С учетом условий закрепления:

$$v|_{z=0} = 0 \text{ и } v|_{z=l} = 0,$$

определим константы:

$$C_2 = 0 \text{ и } C_1 \sin(k \cdot l) = 0 \text{ при этом } C_1 \neq 0$$



# Критическая сила

Определяется решением уравнения:

$$\sin(k \cdot l) = 0 \rightarrow k \cdot l = n \cdot \pi, \quad \text{где } n = 1, 2, 3, \dots$$

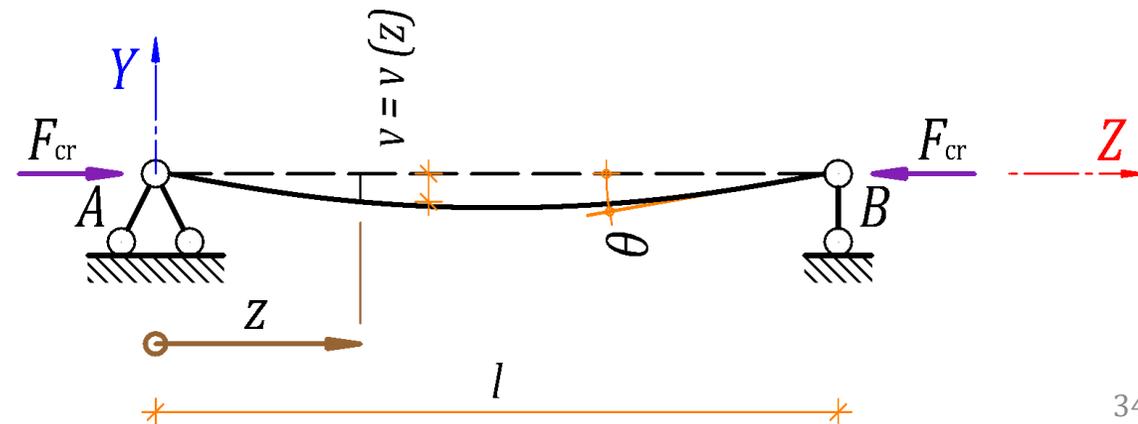
$$\text{тогда: } l \sqrt{\frac{F}{E \cdot I}} = n \cdot \pi \rightarrow F = \frac{n^2 \cdot \pi^2 \cdot E \cdot I}{l^2},$$

и минимальное значение критической силы при  $n = 1$ :  $F_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{l^2}$

При подстановке  $k = n \cdot \pi / l$  в уравнение прогибов получим:

$$v = C_1 \sin\left(\frac{n \cdot \pi \cdot z}{l}\right),$$

где  $n$  – количество опор многопролетной неразрезной балки



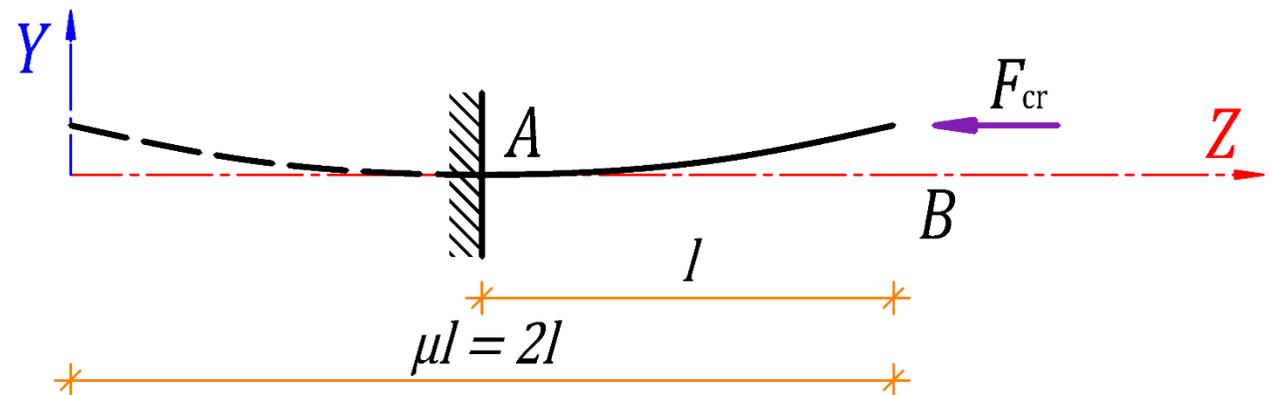
# Коэффициент расчетной длины

Определяется на основе решения дифференциального уравнения с учетом соответствующих условий закрепления или путем отыскания точек перегиба на полуволне синусоиды (на рисунке пример с консольным стержнем):

$$l_{0y} = \mu_y \cdot l_y \quad \text{и} \quad l_{0x} = \mu_x \cdot l_x,$$

тогда минимальное значение критической силы:  $F_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{(\mu l)^2}$

Схема закрепления элемента				
$\mu$	1,0	0,7	0,5	2,0



# Коэффициент динамичности

На примере лифта, поднимающегося с постоянным ускорением  $a$  вверх, определяется на аналогии с уравнением равновесия всех действующих сил на вертикальную ось  $Y$ :

$$\sum F_y = N - P - F_{И} = 0,$$

где  $N$  – нормальная сила в поперечном сечении каната;

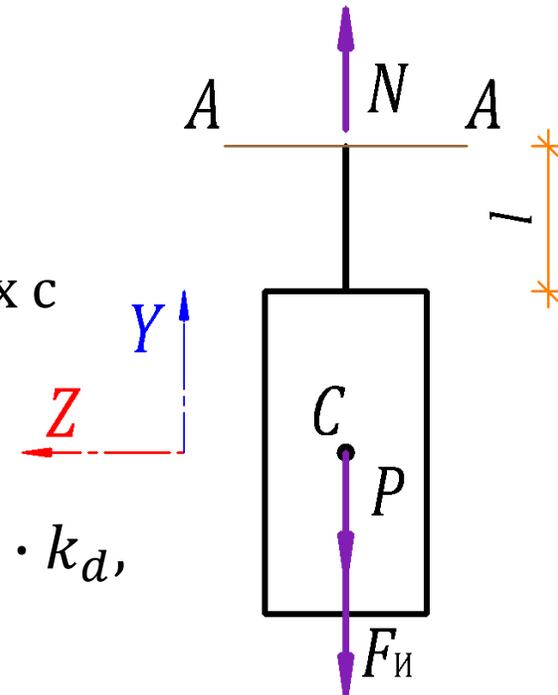
$P = m \cdot g$  – вес кабины лифта и каната длиной  $l$ ;

$F_{И} = m \cdot a$  – сила инерции, возникающая при движении лифта вверх с постоянным ускорением  $a$ ;

$m$  – масса кабины лифта и каната длиной  $l$ , тогда:

$$N = P + F_{И} = m \cdot g + m \cdot a = m(g + a) = m \cdot g \left(1 + \frac{a}{g}\right) = m \cdot g \cdot k_d,$$

где  $k_d = 1 + \frac{a}{g}$  – коэффициент динамичности



# Литература:

- ГОСТ 27751-2014 Надежность строительных конструкций и оснований
- СП 63.13330.2018 Бетонные и железобетонные конструкции
- Павлов П.А., Паршин Л.К., Мельников Б.Е., Шерстнев В.А. Сопротивление материалов : Учебное пособие. 2-е изд., испр. и доп. – СПб.: Издательство «Лань», 2007. – 560 с.
- Безухов Н.И. Основы теории упругости, пластичности и ползучести – Издание второе. – М.: Высшая школа, 1968. – 512 с.

**ИСА | 08.03.01 | ПГС | 6-й семестр**

# **Железобетонные и каменные конструкции**

## **Практическое занятие №1**



НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ

**СТРОИТЕЛЬНЫЙ  
УНИВЕРСИТЕТ**

www: [mgsu.ru/universityabout/Struktura/Kafedri/ZhBK/](http://mgsu.ru/universityabout/Struktura/Kafedri/ZhBK/)

e-mail: [gbk@mgsu.ru](mailto:gbk@mgsu.ru); [PekinDA@mgsu.ru](mailto:PekinDA@mgsu.ru)

тел.: +7 495 287 49 14 доб. 3036, 3084

Пекин Дмитрий Анатольевич, доцент, к.т.н.